120504 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

位置ベクトル

位置を表すベクトルを位置ベクトルという。座標幾何学では、位置を表す実数の組 (x, y) を座標といった。この一般化である。実際、$\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ としたとき、P の位置ベクトル $\vec{p}$ を成分で表せば、$\vec{p} = (x_1, y_1)$ である。位置ベクトルというのが何であるか、しっかり説明できる必要はないが、問題の中で意識することは大切である。

平面に 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ がある。この $\vec{a}$, $\vec{b}$ は座標を一般化した位置ベクトルである。すなわち、基点となる点 O があって、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ である。この基点はどこでもよく、ひょっとしたら R かもしれない。そのときは $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{RA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{RB}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdots ①$, すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ である。これを私は始点変更公式と名づけている。

$\overrightarrow{\mathrm{RA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{RB}}$ から、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{RB}} - \overrightarrow{\mathrm{RA}} \cdots ②$. O, R に相当する点は何でもよい。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はどんな始点にでも変更できる。そして、大切なことは ① にしても ② にしても、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は B の位置ベクトルから A の位置ベクトルを引いているとみることができるかである (ガリレイの相対性原理)。これが位置ベクトルの考えでもっとも本質的なことである。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{d}$ が平行ならば、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\vec{d}$ となる実数 k が一意に存在し、逆も成り立つ。これはベクトルの平行条件である。

3 点 A, B, P が同一直線上にあるならば、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が一意に存在し、逆も成り立つ。この 2 つはベクトルが幾何学の問題を解く上で、役立つ道具であることを示す重要な事柄のひとつである。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ としよう。ベクトルの実数倍の定義により、$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = |t| : 1$, $\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = |t| : |1-t|$ だから、P は線分 AB を $t : (1-t)$ に分ける点である。

始点変更公式により、$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ であるが、これはまさに、分点公式と一致している。

基底 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を与えたとき、平面上のベクトル $\vec{p}$ は、分解の考えを使って、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数の組 (s, t) が一意に存在する。

まとめると、

1. P が直線 AB 上にあること　すなわち 3 点 A, B, P が一直線上にあること
2. $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる t が存在すること
3. P は線分 AB を $t : (1-t)$ に分ける点であること
4. $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ (2 点 A,B を通る直線のベクトル方程式)
5. $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき、$s + t = 1$

これらはすべて同値である。

例題

三角形 ABC において、辺 BC を 2:1 に外分する点を P, 辺 AB を 1:2 に内分する点を Q, 辺 CA の中点を R とするとき、3 点 P, Q, R は一直線上にある。

なんとなれば、

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(分点公式だといってもよいし、$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と始点変更公式から導いたといってもよい)

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって、$-4\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ すなわち P, Q, R は一直線上にある。

また、RQ:RP=1:4 である。

上の証明は P, Q, R の位置ベクトルの基点を A としているが、基点を B とした説明を書いてみる。

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \overrightarrow{\mathrm{BQ}} - \overrightarrow{\mathrm{BR}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}} - (\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{BP}} - \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって、$-4\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ すなわち P, Q, R は一直線上にある。

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を比べるのだという方向性さえ間違わなければなんとかなる。

例題

三角形 ABC において、辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:1 に内分する点を E とする。また、2 つの線分 CD と BE の交点を P とし、直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。

このとき、

C, D, P は同一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

B, E, P は同一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{4}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

A, B, C は, どの 2 点も同一でなくかつ 3 点は同一直線上にないから、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ での表し方は一意である。

$\frac{1}{3}s = 1-t$ かつ $1-s = \frac{3}{4}t$　解いて $s = \frac{1}{3}, t = \frac{8}{9}$

すなわち、BP:PE=8:1, CP:PD=1:2, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

また、A, P, Q は同一直線上にあるから、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Q は直線 BC 上の点なので、$\frac{1}{9}k + \frac{2}{3}k = 1$　解いて $k = \frac{9}{7}$ ゆえに、AP:PQ=7:2