120830 初版
http://goo.gl/MFRFj

微分　第 4 回　接線その 2

接線は教科書で割かれているページ数は少ないが，数学的にも入試数学的にも大切な分野である。

例　　放物線 $y = x^2 - 2x + 5$ の $\mathrm{A}(2, 5)$ における接線の方程式は $y = 2x + 1$ である。
このとき，$(x^2 - 2x + 5) - (2x + 1) = (x - 2)^2$ である。

例　　曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ の $\mathrm{A}(2, 1)$ における接線の方程式は $y = 2x - 3$ である。
このとき，$(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) - (2x - 3) = (x + 1)(x - 2)^2$ である。

接線の求め方に関する定理

$f(x)$ は多項式関数であるとする。
曲線 $y = f(x)$ と a に対して，
点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とすると，$g(x)$ は $f(x)$ を $(x - a)^2$ で割った余りである。

実際 $f(x)$ を $(x - a)^2$ で割って商を $q(x)$ とする。余りをさらに $x - a$ で割ったとして，$f(x) = q(x) \cdot (x - a)^2 + a_1(x - a) + a_0$ とすると，
まず，直ちに $a_0 = f(a)$ である。
接線の傾きは $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ だから，$f(a+h) - f(a) = q(a+h) \cdot h^2 + a_1 h$ より，$f'(a) = a_1$
したがって，$y = a_1(x - a) + a_0$ は接線の方程式である。

この定理の系

$f(x)$ は多項式関数であるとする。
曲線 $y = f(x)$ と a に対して，
点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ であるが，
$f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$ は $(x - a)^2$ を因数にもつ。

この命題が正しいことは，放物線の場合の推測から 3 次関数や他の関数でも用いられているが，多項式関数の場合はこのように証明される。一般の関数ではテイラー展開の考えに他ならない。
この定理は教科書には書いていないが，その筋では周知のものとして，検算に使われる。

	1	-3	2	1
-4			-4	-4
4		4	4	
	1	1	2	-3

(曲線 C： $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ の $\mathrm{A}(2, 1)$ における接線 l の方程式が $y = 2x - 3$ で，C と l の A 以外の共有点の x 座標が -1 であることを，計算した図)