120829 初版
http://goo.gl/MFRFj

微分　第 2 回　用語の確認

階差

数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n = a_{n+1} - a_n$ で定まる数列 $\{b_n\}$ を
数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

例
$\{n^2\}$ の階差数列は $\{2n+3\}$ である。(例は確かめてみたほうがよい。以下同様。)

差分

関数 $f(x)$ と a, h に対して，$f(a+h) - f(a)$ を $f(x)$ の差分という。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ とするとき，
$f(x) = x^2(x-3) + f(3) = (x+3)(x-3)^2 + 9(x-3) + f(3)$ なので，(なんか意味ありげな変形)　$f(3+h) - f(3) = (6+h)h^2 + 9h$

平均変化率

関数 $f(x)$ と a, b に対して，$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ を，x が a から b までの $f(x)$ の平均変化率という。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ とするとき，$f(3) = 4$, $f(4) = 20$ である。
x が 3 から 4 までの $f(x)$ の平均変化率は 16 である。

直線の傾き

曲線 $y = f(x)$ と a, b に対して，$\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$ とする。
$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は直線 AB の傾きである。

例
曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}(4, 20)$ と通る直線の傾きは 16 である。

微分係数

関数 $f(x)$ と a に対して，
$x=a$ 付近における，x の増分 Δx と $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ の比を考える。
Δx を 0 に近づけるとき，この比の値の極限値を，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数という。しばしば $f'(a)$ とかく。
すなわち，$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において h を 0 に近づけたときの極限値のことである。

極限値における重要な定理

関数 $f(x)$ について，$x=a$ におけるの値が <u>存在する</u> と仮定する。
このとき，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
x を a に近づけると $f(x)$ は $f(a)$ に近づく。
再度確認すると $f(a)$ が <u>存在する</u> ことは重要な仮定である。

例
$f(x)=x^3-3x^2+4$ とする。
$f'(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}((6+h)h+9)=9$
(なんとも意味深な変形)

導関数 微分

関数 $f(x)$ に対して，x の各点 a と $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の対応を f' とかく。
すなわち，$f'(x):\ a\mapsto f'(a)\qquad f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という。
f から f' を求めることを $f(x)$ を x で微分するという。
ライプニッツ流には $\frac{d}{dx}f(x)$ とかく。
すなわち，$\frac{d}{dx}:\ f(x)\mapsto f'(x)$

$f(x)=x^3-3x^2+4$ とする。$f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を定義にしたがって求めてみる。
$f(x+h)-f(x)=((x+h)^3-3(x+h)^2+4)-(x^3-3x^2+4)=3hx^2+\left(3h^2-6h\right)x+h^3-3h^2$
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2-6a+3ha+h^2-3h$
よって，$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2-6a$

別の変形
$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った商を $q(x)$ とすると，
$f(x)=q(x)(x-a)^2+(3a^2-6a)(x-a)+f(a)$ だから，
$f(a+h)-f(a)=q(a+h)\cdot h^2+(3a^2-6a)h$,
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=q(a+h)\cdot h+(3a^2-6a)$
よって，$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2-6a$

任意の a に対して，$f'(a)=3a^2-6a$ なので，
導関数としては，$f'(x)=3x^2-6x$