120919 初版 121124 改訂
http://goo.gl/MFRFj

教本 数列 帰納的定義

4 つの基本的な漸化式の典型的な解法を挙げる。

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3$ で数列 $\{a_n\}$ を $a_n\ (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ と定義することができる。この式を漸化式，このような作り方を数列を帰納的に定義するという。数列を生成するともいう。

様子を見てみる。
$n = 1$ として，$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3$
$n = 2$ として，$a_3 = a_2 + 3 = (1 + 3) + 3 = 1 + 3 \times 2$
$n = 3$ として，$a_4 = a_3 + 3 = (1 + 3 \times 2) + 3 = 1 + 3 \times 3$
$n = 4$ として，$a_5 = a_4 + 3 = (1 + 3 \times 3) + 3 = 1 + 3 \times 4$
したがって，一般に
$a_n = a_{n-1} + 3 = (1 + 3 \times (n - 2)) + 3 = 1 + 3 \times (n - 1) = 3n - 2$

次のように見ることもできる。
十分大きい n について，$a_n = a_{n-1} + 3$
$= (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 3 \times 2$
$= (a_{n-3} + 3) + 3 \times 2 = a_{n-3} + 3 \times 3$
$= (a_{n-4} + 3) + 3 \times 3 = a_{n-4} + 3 \times 4$
$= \cdots = a_1 + 3 \times (n - 1) = 3n - 2$

このように，漸化式から a_n を n の式で表すことを，漸化式を解くという。隣接項間関係から一般項を求めることである。
実際の問題では次のように公式化して解答は 1 行で済ませてしまう。

漸化式 1

$a_{n+1} = a_n + d$ (d は n に依らない定数) で生成される数列については,
$a_n = a_1 + (n - 1)d$

例　理解するために自分で確かめてみよう。
$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 2$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_n = 3 - 2(n - 1) = -2n + 5$

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n$ で数列 $\{a_n\}$ を $a_n\ (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ と定義することができる。

様子を見てみる。
$n = 1$ として，$a_2 = 3a_1 = 3 \times 2$
$n = 2$ として，$a_3 = 3a_2 = 3^2 \times 2$
$n = 3$ として，$a_4 = 3a_3 = 3^3 \times 2$
$n = 4$ として，$a_5 = 3a_4 = 3^4 \times 2$
したがって，一般に
$a_n = 2 \times 3^{n-1}$

次のように見ることもできる。
十分大きい n について，$a_n = 3a_{n-1}$
$= 3(3a_{n-2}) = 3^2 \cdot a_{n-2}$
$= 3^2(3a_{n-3}) = 3^3 \cdot a_{n-3}$
$= 3^3(3a_{n-4}) = 3^4 \cdot a_{n-4}$
$= \cdots = a_1 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

実際の問題では次のように公式化してしまう。

漸化式 2

$a_{n+1} = ra_n$ (r は n に依らない定数) で生成される数列については，
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

例　理解を助けるために自分の手でやってみよう。
$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 4a_n$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について，
$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+(2n-1)$ で数列 $\{a_n\}$ を $a_n\ (n=1,2,3,4,\cdots)$ と定義することができる。

様子を見てみる。
$n=1$ として，$a_2=a_1+1=2+1$
$n=2$ として，$a_3=a_2+3=(2+1)+2=2+1+3$
$n=3$ として，$a_4=a_3+5=(2+1+3)+5=2+1+3+5$
$n=4$ として，$a_5=a_4+7=(2+1+3+5)+7=2+1+3+5+7$
したがって，一般に
$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=n^2-2n+3$$

次のように見ることもできる。
十分大きい n について，$a_n=a_{n-1}+(2n-3)$
$=a_{n-2}+(2n-5)+(2n-3)$
$=a_{n-3}+(2n-7)+(2n-5)+(2n-3)$
$=a_{n-4}+(2n-9)+(2n-7)+(2n-5)+(2n-3)$
$=\cdots=a_1+1+3+5+\cdots+(2n-5)+(2n-3)$

実際の問題では次のように公式化してしまう。

漸化式 3

$a_{n+1}=a_n+b_n$ (すなわち数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\{b_n\}$) で生成される数列については，
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

例　数学では例はとても重要である。
$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2n$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について，
$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k)=n^2-n+3$$

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5a_n + 4$ で数列 $\{a_n\}$ を $a_n\ (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ と定義することができる。

まずはちょっとした工夫が必要である。

漸化式の変形

$\alpha = p\alpha + q$ を満たす α を用いると
$a_{n+1} = pa_n + q \iff a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

今の場合，$\alpha = 5\alpha + 4$ を解いて $\alpha = -1$
$a_{n+1} = 5a_n + 4 \iff a_{n+1} + 1 = 5(a_n + 1)$
様子を見てみる。
$n = 1$ として，$a_2 + 1 = 5(a_1 + 1)$
$n = 2$ として，$a_3 + 1 = 5(a_2 + 1) = 5^2(a_1 + 1)$
$n = 3$ として，$a_4 + 1 = 5(a_3 + 1) = 5^3(a_1 + 1)$
$n = 4$ として，$a_5 + 1 = 5(a_4 + 1) = 5^4(a_1 + 1)$
したがって，一般に $a_n + 1 = 5^{n-1}(a_1 + 1)$
すなわち，$a_n = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$

次のように見ることもできる。
十分大きい n について，$a_n + 1 = 5(a_{n-1} + 1)$
$= 5 \cdot 5(a_{n-2} + 1) = 5^2(a_{n-2} + 1)$
$= 5^2 \cdot 5(a_{n-3} + 1) = 5^3(a_{n-3} + 1)$
$= 5^3 \cdot 5(a_{n-4} + 1) = 5^4(a_{n-4} + 1)$
$= \cdots = 5^{n-1}(a_1 + 1)$

実際の問題では次のように公式化してしまう。

漸化式 4

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ (p, α は定数) で生成される数列については,
$a_n - \alpha = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$

例
$a_1 = 6,\ a_{n+1} = 4a_n - 3$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_{n+1} = 4a_n - 3 \iff a_{n+1} - 1 = 4(a_n - 1)$
よって，$a_n - 1 = 4^{n-1}(a_1 - 1)$
すなわち，$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 1$

漸化式 1

$a_{n+1} = a_n + d$ (d は n に依らない定数) で生成される数列については,
$a_n = a_1 + (n-1)d$

例　理解するために自分で確かめてみよう。
$a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - 2$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_n = 3 - 2(n-1) = -2n + 5$

漸化式 2

$a_{n+1} = ra_n$ (r は n に依らない定数) で生成される数列については,
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

例　理解を助けるために自分の手でやってみよう。
$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 4a_n$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

漸化式 3

$a_{n+1} = a_n + b_n$ (すなわち数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\{b_n\}$) で生成される数列については,
$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例　数学では例はとても重要である。
$a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_n = 3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k) = n^2 - n + 3$

漸化式の変形

$\alpha = p\alpha + q$ を満たす α を用いると
$a_{n+1} = pa_n + q \iff a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

漸化式 4

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ (p, α は定数) で生成される数列については,
$a_n - \alpha = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$

例
$a_1 = 6$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$ で生成される数列 $\{a_n\}$ について,
$a_{n+1} = 4a_n - 3 \iff a_{n+1} - 1 = 4(a_n - 1)$
よって，$a_n - 1 = 4^{n-1}(a_1 - 1)$
すなわち，$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 1$