121001 初版
http://goo.gl/MFRFj

微分　第 6 回　増減と極値

接線 再掲

曲線 $y = f(x)$ と a に対して,
点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ である。
この書き方は幾何っぽい。
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ と書いたほうが解析学らしい。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 6x$ で，曲線 $y = f(x)$ の $(3, 0)$ における接線の傾きは 9, 方程式は，$y = 9x - 27$ である。

接線の意味としては,

近似式

$f(x)$ の値は $x = a$ 付近では $f'(a)(x - a) + f(a)$ で近似できる。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2$ とする。曲線 $y = f(x)$ の $(3, 0)$ における接線の方程式は，$y = 9(x - 3)$ であるが,
$f(x) = (x + 3)(x - 3)^2 + 9(x - 3)$ であり，$f(3 + h) = (6 + h)h^2 + 9h$
$f\left(3 + \dfrac{1}{100}\right)$ の真の値は $\dfrac{1}{1000000} + \dfrac{6}{10000} + \dfrac{9}{100}$
一方，だいたい $9(x - 3)$ なので $\dfrac{9}{100}$ と見積もると，誤差は 100 万分の 601

変化率の定義に立ち返ってもいいが，この式を見てもわかるとおり
$f'(a) > 0 \Longleftrightarrow$ 接線は右上がり $\Leftrightarrow$ $x = a$ 付近では $f(x)$ は増加
$f'(a) < 0 \Longleftrightarrow$ 接線は右下がり $\Leftrightarrow$ $x = a$ 付近では $f(x)$ は減少
導関数の言葉では,

関数の増減

$f'(x) > 0$ となる区間では x が増えると $f(x)$ の値は増加する。
$f'(x) < 0$ となる区間では x が増えると $f(x)$ の値は減少する。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 6x$
したがって，
$x < 0$ または $2 < x$ のとき，$f(x)$ は増加する。
$0 < x$ かつ $x < 2$ すなわち $0 < x < 2$ のとき，$f(x)$ は減少する。

極値

$x = a$ で $f(x)$ が増加から減少に転ずるとき，$f(x)$ は $x = a$ で極大となり，極大値 $f(a)$ をとるという。
$x = a$ で $f(x)$ が減少から増加に転ずるとき，$f(x)$ は $x = a$ で極小となり，極小値 $f(a)$ をとるという。
$f'(x)$ が $x = a$ で連続であるとき，$x = a$ で極値をとるならば，$f'(a) = 0$ である。この逆はいつも成り立つとは限らない。

例
$f(x) = x^3 - 3x^2$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 6x$
したがって，
$x < 0$ または $2 < x$ のとき，$f(x)$ は増加する。
$0 < x$ かつ $x < 2$ すなわち $0 < x < 2$ のとき，$f(x)$ は減少する。
よって，
$x = 0$ で極大値 0, $x = 2$ で極大値 -4 をとる。