121001 初版
http://goo.gl/MFRFj

微分　第 7 回　最大・最小

本来この部分は数学の理論では純粋にはない。だが，重要な箇所なので例題という形で載せる。

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の値の変化について考えてみたい。
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ であるから，
$x < 0$ または $2 < x$ で増加
$0 < x$ かつ $x < 2$ すなわち $0 < x < 2$ で減少である。

x のとりうる区間として $1 \leqq x \leqq 3$ とすると，
$2 < x < 3$ で増加
$1 < x < 2$ で減少である。
したがって，この区間での最大・最小を調べるには，$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ の 3 つの値を調べればよい。

本来，最大・最小の問題は集合でいえば，値域 $\{x^3 - 3x^2 + 4 | \ 1 \leqq x \leqq 3\}$ に属する無限個の値の中から，最大のものを取り出すのである。
だいたい，数学の問題は無限との戦いである。有限のものであれば，例えば最大値の問題でも，有限回の操作でことが足りる。(並べ替え問題はそれはそれで面白い)
だから，この問題では，増減についての記述が答案の中にしっかりと書かれていなければならない。

$1 \leqq x \leqq 3$ において，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の値は，
$x = 2$ で最小値 $f(2) = 0$, $x = 3$ で最大値 $f(3) = 4$ をとる。

よくありがちな問題を次に考察してみる。

例題
a を $-\dfrac{1}{2}$ より大きな定数とする。
$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq a$ における $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の最大値 $M(a)$, 最小値 $m(a)$ をそれぞれ a で表せ。

まず，$M(a)$ について,
グラフ (ビジュアル) は大切だと思うが，論理そして計算と三位一体で問題を解いていく。
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ であるから，$f(x)$ は $x < 0$ または $2 < x$ で増加，$0 < x < 2$ で減少である。
すなわち,
$-\dfrac{1}{2} \leqq x_1 < x_2 \leqq 0$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) < f(x_2)$,
$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 2$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) > f(x_2)$,
$2 \leqq x_1 < x_2$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) < f(x_2)$ である。
したがって，$2 \leqq \alpha$ で $f(\alpha) = f(0)$ なる α を見つければ,
$-\dfrac{1}{2} < a < 0$ については，$M(a) = f(a)$, $0 \leqq a \leqq \alpha$ については，$M(a) = f(0)$, それより大きい a については，$M(a) = f(a)$ である。
方程式 $f(x) = f(0)$ の解，すなわち，$f(x) - f(1) = x^3 - 3x^2$ の零点を求めるのだが，よく知られているように (別紙参照　だがこの場合は明らか) $x = 0$ は二重解である。
つまり，$f(x) - f(0) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - \alpha)$
グラフ上は存在するその解を計算で求めると，3 である。
したがって，$M(a) = \left[\begin{array}{ll} 4 & (\text{if } 0 \leqq a \leqq 3) \\ a^3 - 3a^2 + 4 & (\text{if } -\dfrac{1}{2} < a < 0,\ 3 < a) \end{array}\right.$

次に，$m(a)$ について,
グラフ (ビジュアル) は大切だと思うが，論理そして計算と三位一体で問題を解いていく。
$-\dfrac{1}{2} \leqq x_1 < x_2 \leqq 0$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) < f(x_2)$,
$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 2$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) > f(x_2)$,
$2 \leqq x_1 < x_2$ なる x_1, x_2 については，$f(x_1) < f(x_2)$ であった。
したがって，$0 \leqq \beta \leqq 2$ において $f(\beta) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ なる β を見つければ,
それより小さい a については，$m(a) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\beta \leqq a \leqq 2$ については，$m(a) = f(a)$, 2 より大きい a については，$M(a) = f(2)$ である。
方程式 $f(x) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ の解，すなわち，$f(x) - f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ の零点を求めるのだが，当たり前のように $x = -\dfrac{1}{2}$ は解である。
つまり，$f(x) - f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - \beta)(x - \beta')$
グラフ上は存在するその解 $(0 \leqq \beta \leqq 2)$ を計算で求めると，$\dfrac{7 - \sqrt{21}}{4}$ である。
したがって，$m(a) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{25}{8} & (\text{if } -1 < a \leqq \dfrac{7 - \sqrt{21}}{4}) \\ a^3 - 3a^2 + 4 & (\text{if } \dfrac{7 - \sqrt{21}}{4} < a < 2) \\ 0 & (\text{if } 2 \leqq a) \end{array}\right.$