120830 初版　121106 更新
http://goo.gl/MFRFj

微分　第 3 回　接線

$f(x) = x^2$ について，
$x = 1$ から $x = 2$ までの平均変化率は $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 3$ である。

$x = 1$ から $x = 1 + h$ までの平均変化率をいろいろな h に対して求めてみよう。

h	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\to$	0
平均変化率	3						

そのたびに $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f\left(\frac{9}{8}\right)$, $f\left(\frac{17}{16}\right)$ を計算するのは手間である。工夫してみよう。

この経験は無駄ではない。なんでわざわざこんなことのだろう。こんなことしなくてもいいけど，数学を知っているひとからするとこれをやらせたくなる。無知ってはずかしいことなんだよ。そんなことしなくてもいいのに。という科白は無知をさらけだしているのだから，だまっているほうがまし。地方では優秀といわれる高校生にはありがちな場面である。賢い人は，なぜそうするのかと質問する。断定するのと質問するのは大きな違いがある。これは，平均値の定理，近似式，ニュートン近似，テイラー展開につながる。
連想力や想像力は大切だなと思う。

放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(1, 1)$ における接線の方程式は $y = 2x - 1$ である。
これを求めるには連立方程式 $y = x^2$, $y = m(x - 1) + 1$ の解が 1 組になる m の条件を求めることになる。それは，重解条件を使ってもよい。放物線だったら。

微分を使うと m は次のように求められる。
例　　$y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(1, 1)$ における接線の傾きを求める。
$\mathrm{B}(1 + h, f(1 + h))$ として，B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限値が求める接線の傾きである。
$f(x) = x^2$ を $x - 1$ で割ると，商は $x + 1$, 余りは 1 である。(特にこの余りは $f(1)$ に等しい)　$x + 1$ をさらに $x - 1$ で割ると，商は 1, 余りは 2 である。
すなわち，$f(x) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1$ (なんでわざわざこんな変形するのだろう。こんなことしなくてもいいけど，これは数学を知っているひとの変形である。無知ってはずかしいことなんだよ。そんなことしなくてもいいのに。という科白は無知をさらけだしているのだから，だまっているほうがまし。地方では優秀といわれる高校生にはありがちな場面である。賢い人は，なぜそうするのかと質問する。断定するのと質問するのは大きな違いがある。大切なことなので，今回も 2 度言いました。)
したがって，$f(1 + h) - f(1) = h^2 + 2h$
よって，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$
つまり

接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ と a に対して，
点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の傾きは微分係数 $f'(a)$ に等しい。

接線

曲線 $y=f(x)$ と a に対して，
点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ である。
この書き方は幾何っぽい。
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ と書いたほうが解析学らしい。

導関数と微分係数

関数 $f(x)$ に対して，x の各点 a と $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の対応を f' とかく。
すなわち，$f'(x)\colon\ a \mapsto f'(a)$　　$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といった。
逆に導関数 $f'(x)$ がわかったとき，x に a を代入すると微分係数 $f'(a)$ が求まる。

例　$f(x)=2x^2$ とする。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	a
$f(x)$	8	2	0	2	8	18	32	$2a^2$
微分係数	-8	-4	0	4	8	12	16	$4a$

この段階では 3 行目の微分係数はそれぞれ極限操作で求める。

この表において，1 行目の a から 3 行目の微分係数 $4a$ を対応させることで，関数 $x \mapsto 4x$ を考えることができる。これが $f(x)$ の導関数 $f'(x)=4x$ である。

そして，これはグラフ上の点 $(a, 2a^2)$ における接線の傾き $4a$ を与える。