121106 初版
http://goo.gl/MFRFj

微分と積分　第 10 回　積分の考えと面積

整備された数学を学ぶとあまり意識しないかもしれないが，数列の考えと関数の考えはとても似ている。

10.1 差と微分

例えば，数列 $\{3n^2\}$ の第 n 項 $a_n = 3n^2$ に対して，
階差数列 $\{b_n\}$ は定義によって，$b_n = a_{n+1} - a_n = 3(n+1)^2 - 3n^2 = 6n + 3$

関数 $f(x) = 3x^2$ について，
$x = a$ から $x = a + h$ まで変化するとき，
$f(a+h) - f(a) = 3(a+h)^2 - 3a^2 = 6ah + 3h^2$
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 6a$

数列における階差数列は，文字通り差を作っている。関数における微分は，差の考えが根底にある。

10.2 数列の和

数列においては，和の考え方がある。例えば，$a_n = 3n^2$ のとき，
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 = \dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$
また，階差数列 $\{6n+3\}$ からもとの数列が再現できる。
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+3) = 3 + 3n(n-1) + 3(n-1) = 3n^2$

10.3 積分の考え

関数においても，和の考えをしてみる。例えば，
$I = \int_0^2 3x^2 dx$ というのは，$f(x) = 3x^2$ の $x = 0$ から $x = 2$ までの <u>何らかの和</u> であると定義する。英語では integration, 日本語では積もるという字をあてている。
数列との大きな違いは，有限の区間の和でも無限和を考えなければならない。
関数の値をただ足したのでは，
$I_1 = f(0) + f(1) + f(2) = 0 + 3 + 12 = 15$
$I_2 = f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2)$
$= 0 + \frac{3}{16} + \frac{12}{16} + \frac{27}{16} + \frac{48}{16} + \frac{75}{16} + \frac{108}{16} + \frac{147}{16} + \frac{192}{16} = \frac{612}{16}$
和はどんどん大きくなっていく。正の項数が増えていくので当然である。そこで，項に適当な重さ (weight, 測度=measure) を付けて和をとることにする。科学，工学での有用性から，この連続的な和が今の例では，曲線 $y = 3x^2$ と $x = 0$, $x = 2$ で囲まれた部分の面積と等しくなるのがよい。どんなに多く分割したとしても <u>weight の合計</u> が 2(和をとる区間幅) となるようにするとよい。$I_1 \cdot \frac{2}{3} = 10$,　$I_2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{17}{2}$

高校では，単純に区間を等分する。今の例では，$x=0$ から $x=2$ までを n 等分する。

x として，$\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \cdots, \frac{2n}{n}$ という数列をとり，

関数の値の数列の第 k 項 a_k として，$f\left(\frac{2(k-1)}{n}\right)$ または $f\left(\frac{2k}{n}\right)$ をとる。

今回は数列 $\left\{3\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$ を採用する。重み (測度) として，分割した 1 つの幅 $\mathit{\Delta}x=\frac{2}{n}$ を採用する。

そこで，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathit{\Delta}x=\sum_{k=1}^{n} 3\left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$ において，分割数 n を限りなく大きくしたときの和を考える。項の数は大きくなるが，それに応じてちょうどよい加減で weight は小さくなるので，和は収束して，面積に近づいていく。

これが関数における和の考え，積分である。すなわち，

$$I=\int_0^2 3x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathit{\Delta}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 3\left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$$

さてここで，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} 3\left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}=\frac{24}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{4}{n^3}n(n+1)(2n+1)=4\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

であるから，$\displaystyle\int_0^2 3x^2dx=\lim_{n\to\infty} S_n=8$

10.4 定積分と原始関数

ということで，(本来の高校での) 定積分の定義は，

定積分の定義

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathit{\Delta}x$$

ここで，　$\mathit{\Delta}x=\frac{b-a}{n}$,

数列 $\{x_k\}$ は初項 a, 末項 b, 項数 $n+1$, 公差 $\mathit{\Delta}x$ の等差数列

数列 $\{a_k\}$ は，$m_k \leqq a_k \leqq M_k$ なる数列

m_k, M_k は区間 $x_k \leqq x \leqq x_{k+1}$ における $f(x)$ の最小値，最大値

さて，$S(a)=\displaystyle\int_c^a f(x)dx$, $S(b)=\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ とすると，定積分の定義によって，次のことがいえる。

(i) $S(b)-S(a)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

(ii) $S(a+h)-S(a)$ はほぼ $f(a)\cdot h$　特に，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(a+h)-S(a)}{h}=f(a)$

(ii) は $S(x)$ の $x=a$ における微分係数が $f(a)$ であること，すなわち $S(x)$ の導関数が $f(x)$ であることを示している。

したがって，

定積分

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

ここで，$F(x)$ は $f(x)$ を導関数にもつ関数

区分求積法は定積分の定義から直ちに導かれる。