120630 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 2 回

2.0 回転

高校数学から行列がなくなると，回転が表せなくって困るという人は，20 世紀末，21 世紀初頭の高校数学を知らない人，またはその受け売りの人，または大学で数学をよく勉強しなかった人，(またはその受け売りの人) である。

正接の加法定理の例題として，2 直線のなす角の問題があるが，きれいな問題のなす鋭角はたいてい 45 度である。直線 $y=\frac{1}{2}x$ を原点を中心に 45 度回転したい。虚数 $2+i$ に $1+i$ をかけて，$1+3i$ だから，直線 $y=3x$ である。

実際，$\tan\alpha=\frac{1}{2}, \tan\beta=3$ として，$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$

また，$\vec{a}=(2,1), \vec{b}=(1,3)$, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすれば，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

高校 2 年になると，道具が増えてくるから，特に幾何の問題は別の見方ではどうやって解くことができるのかを考えてみるほうがいい。ちなみに，私はこの手のなす角を求める練習問題 (正接の加法定理の利用) を作るために，虚数を使っている。虚数を使えない人はかわいそうである。少なくとも行列を知らない人よりも悲しい。虚数が役立たずの代名詞のようになっていて悲しいし，そう主張する人が結構いるのでなお悲しい。なるほど日本がオワッテしまうわけである。日本復活の原動力は受験数学を超えた数学である。

例の齋藤先生の本では，回転を行列の導入としてあげておられる。機会を見て取り上げようと思う。

2.1 クラメルの公式

前回 $2A-3B=X, 3A+2B=Y$ ならば $A=\frac{2}{13}X+\frac{3}{13}Y$, $B=\frac{3}{13}X-\frac{2}{13}Y$ が成り立つという話をした。この A, B は加法と実数倍がちゃんと定義されている集合であれば，何でもよい。私たちが知っている例とすれば，実数，複素数，ベクトル，多項式あたりである。まあ，$\mathbb{R}-$ 加群であればよいといったりする。

慣例によって，次のような書き方をする。

a, b, c, d を実数とする。x,y (とりあえず実数としようか) に対して，
p を $ax+by=p$, q を $cx+dy=q$ で定めるとする。

$adx+bdy=dp, bcx+bdy=bq$ であるから，$(ad-bc)x=dp-bq$
また，$acx+bcy=cp, acx+ady=aq$ であるから，$(ad-bc)y=aq-cp$

ここで，記号を導入する。$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

この記号を最初に使った人はライプニッツ級の頭のよさである。今回は，行列の積と逆行列の話にはいかない。$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ が 0 でないなら，$x=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, y=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

齋藤正彦先生は一般の場合，連立方程式をクラメルの方法で解くのはどうかと書いているが，2 元連立の場合は暗算で解くことのできるすばらしい公式だと思っている。余裕のある高校生は知っているべきである。2 元 1 次 (線型) 連立方程式を解く場面は山ほどあるのだから。

クラメルの公式を使って連立方程式 $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$ を解いてみよう。すばらしく簡単である。加減法を公式化したに過ぎないので高度な無茶はしていないし，私はこの方法を行列を使って解いたとはいわない。行列式を使って解いているとは思うが。