120701 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 3 回

3.1 2 次の行列式

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ は単に記号だった。すぐわかるとおり，いくつかの性質がある。

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　転置

2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$　交代

3) $k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ak & bk \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ck & dk \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ak & b \\ ck & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bk \\ c & dk \end{vmatrix}$　1), 2) を認めれば，1 つでよさそう

また，

4) $\begin{vmatrix} a+l & b+m \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+l & b \\ c+m & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & b \\ m & d \end{vmatrix}$

特に，$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

3.2 3 次の行列式

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = r \end{cases}$ を解いてみよう。

下 2 つの式より，

$\begin{cases} a_{22}y + a_{23}z = q - a_{21}x \\ a_{32}y + a_{33}z = r - a_{31}x \end{cases}$ で，$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ とおいて，

$$\Delta_{11} \cdot y = \begin{vmatrix} q - a_{21}x & a_{23} \\ r - a_{31}x & a_{33} \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & a_{23} \\ r & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{11} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{22} & q - a_{21}x \\ a_{32} & r - a_{31}x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} q & a_{22} \\ r & a_{32} \end{vmatrix}$$

したがって，

$$x\left(a_{11} \cdot \Delta_{11} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) = p \cdot \Delta_{11} - a_{12}\begin{vmatrix} q & a_{23} \\ r & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} q & a_{22} \\ r & a_{32} \end{vmatrix}$$

記号の作り方を考えると，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

とするのが妥当だろう。逆にこれを 3 次の行列式の余因子展開という。

そして，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

であるが，サラスの方法という覚え方がある。3 次の行列式にも 2 次と同様の性質がある。