120711 初版 120712 改訂
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 4 回

3 次の行列式の利用 その 1

3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

であるが，サラスの方法という覚え方がある。これは記号の定義だと思ってよい。3 次の行列式にも 2 次と同様の性質がある。

大きな性質としては，

行列式の性質 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

・少なくとも 2 行，値が同じであれば行列式の値は 0
・少なくとも 2 列，値が同じであれば行列式の値は 0

証明はただの計算である。n 次の行列式の場合は上手い証明がある。

記号の作り方を考えると，

行列式の余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

転置，交代などあるが，このあたりにしておく。

行列式の性質 1 により

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

余因子展開を使うと

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

したがって，次のことがいえる。

ベクトルの垂直

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とする

$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ とするならば、$\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{n}=0$

例えば、こんな問題がある。

２つのベクトル $\vec{a}=(1,1,2)$, $\vec{b}=(4,-1,3)$ の両方に垂直で、大きさが $\sqrt{3}$ であるベクトルを求めよ。

こんな答案はどうだろう。

$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right)$ とすると、

明らかに $\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{n}=0$…☆である。

<u>逆に</u> ☆を満たす $\vec{n}$ は平行なものをのぞいて <u>これしかない</u>。

$\vec{n}=(5,5,-5)$ で、$|\vec{n}|=5\sqrt{3}$ だから、求めるベクトルは、

$(1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$

採点者が線型代数を知っていれば (大抵知っていますよ)，$\vec{n}$ をこう定めれば☆を満たすことは，計算せずに明らかなことである。

この答案で得点できるかは、他の問題をどう解いているかにかかってくるのである。他の簡単な問題が解けないのに，この問題だけ大学の線型代数を使って解いていると，うわべだけの人と思われて大人に嫌われる。

また，下線部がない答案は必要性を述べていないので，大幅な減点対象となる。

例えば，$x=2$ ならば $x^2-3x+2=0$ なのは明らかであるが，$x=2$ は十分条件に過ぎない。

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 4x-y+3z=0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$$

これを解くことは，解の必要性も述べているよい答案なのである。方程式は解の満たさなければならない必要条件を記述する。数学のよさのひとつである。外積 (そう言う人が多い) を使って解いて，スマートに解いたと喜んでいる人はそんな落とし穴があることに気づかない。数学の奥深さを知らないうわべだけの知識より，この程度の計算力はつけたほうがよい。