

## 5.1 1次形式

2つの数  $a, b$  と変数  $x, y$  に対して,  $ax + by$  を  $a, b$  を係数とする1次形式という。

3つの数  $a, b, c$  と変数  $x, y, z$  に対して,  $ax + by + cz$  を  $a, b, c$  を係数とする1次形式という。一般には

1次形式

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  と変数の列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に対して,  $\sum_{k=1}^n a_k x_k$  を1次形式という。

$ax^2 + bxy + cy^2$  を2次形式というので, 私は1次形式を線型形式とあまりいわないが, そういう場合もある。

## 5.2 内積・外積

何だ内積じゃないかという人がいるかもしれないが, それは, 定義と性質を混同している。

ベクトルの出発点は物理の理論にある。元来工学を記述する一つの方法として数学があったので, 数学を技術の奴隷ということがあるが, そんな側面もある。高校数学は別に述べたように, 数学者を養成するためだけにあるのではない。日本の高校2年のカリキュラムは特に, 質のよい技術者を養成するぞ, というのが色濃く出ている。(少子化の進んだ今は少し方向転換しようとしている。) 物理の理論を一般化すると数学がさらに高度化する。もちろん純粋に数学の中で完結する理論もあるが。

内積の定義

2つの有向線分  $\vec{a}, \vec{b}$  があったとき,  $\vec{b}$  の  $\vec{a}$  への正射影の大きさと  $\vec{a}$  の大きさの積をこの2つの有向線分の内積という。 $\vec{a}$  の  $\vec{b}$  への正射影の大きさと  $\vec{b}$  の大きさの積といってもよい。

定義より交換法則が成り立つ。

正射影の定義は, 本来三角比で行うべきものである。

正射影の定義

有向線分  $\vec{AB}$  と直線  $l$  があったとき,  $A$  を通り直線  $l$  と平行な直線  $l'$  をとる。  $B$  から  $l'$  に垂線  $BH$  を引くとき, 有向線分  $\vec{AH}$  を  $\vec{AB}$  の  $l$  への正射影という。

つまり, 内積という概念はユークリッド幾何学を仮定している。1次形式は純粋に代数学の概念だからその発想はない。この現象が起こる本質とは何かを考えながら, 構造や条件を加減して理論を作り上げるのが数学である。その意味で数学は科学の女王である。

ちなみに

外積の定義

2つの有向線分  $\vec{a}, \vec{b}$  があったとき,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  ができる平面の法線を考える。 $\vec{a}$  から  $\vec{b}$  への回転が右回りになるように, 法線に正の向きを定める。その有向線分のうち大きさが  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で張られる平行四辺形の面積に等しいものを  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の外積という。

定義より, 交換法則は成り立たず, 交代性をもつ。

このように、有向線分の内積、外積は純粹に物理量で定義される。特に外積については定義の段階では3次元でしか定義されていない。これらの数学的な性質に注目すると、線型代数の概念が出来上がる。

#### 内積の性質

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  とすると、この2つのベクトルの内積は  $a_1b_1 + a_2b_2$  である。

これは余弦定理と同値である。ベクトルの問題に対して、生徒の解答をみると、それは内積の展開でしょ、というところで、余弦定理を使っていたりする、推論と答えが正しければよいのだが、そこをただの計算(TDN)にしているのが、代数学のよさなんだけどな。別のアプローチを考えることは、発想を豊かにして、本質を見抜く目を養う。余弦定理という(ピタゴラスの定理の拡張)ユークリッド幾何を特徴づける性質を使うと、 $\vec{a}$  と  $\vec{x}$  の内積が、ベクトルを直交成分で表したときの1次形式となることが面白いのである。問題解決の立場でいうと、余弦定理を使う場面では、座標の設定がされていると1次形式が使えるよということになる。

よくこんな問題がある。

$x^2 + y^2 = 3$  のとき、 $2x + y$  のとりうる値の範囲を求めよ。

1次形式の値の問題であるが、ベクトルの解法はよく知られている。

$\vec{a} = (2, 1), \vec{x} = (x, y)$  とすると、

内積の定義により直ちに、 $-|\vec{a}||\vec{x}| \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq |\vec{a}||\vec{x}|$

条件より、 $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{x}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{x} = 2x + y$  だから、 $-\sqrt{15} \leq 2x + y \leq \sqrt{15}$

この解答は文句がない。(そうそう、記号は正しく使おうよ。数式は音読することをすすめる。)ただ、解法に優劣はない。別のアプローチを考えることは、発想を豊かにして、本質を見抜く目を養う。(大切なんで2度言いました)問題が解ければいいんでしょ。というのはここ数年の風潮、競争社会の残骸。現在は競争社会じゃないのに、大した実力のないものがさらに自分より下のものを蹴落とそうとテクニクに走っている。ここ数年の我が県教育界の悪しきトレンドだった。共存社会では、他人よりも擧げる必要がない。自分のいいところを他人のために生かすという姿勢が大切である。高校2年、3年の数学の問題の解法は裏ワザといわれるものが多数存在するが、私に言わせれば、その裏ワザの根拠を探るほうが断然おもしろい。裏ワザを披露するのは、僕できるよ、知っているよ、見て見て、という程度の精神の幼児性である。この一連の講座は裏ワザ披露会ではなく、ものの本質を探ろうとしているのである。

$2x + y$  を1次形式(あるいは線型結合)とみるのは、式の見方を豊かにしている。だから、先の解法も生まれてくる。なんとか形式という考えは、高等数学でよく出てくる。微分形式とか保型形式とか。テンソル...

### 5.3 また連立方程式

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 32 \end{cases}$$

というわけでいよいよ次回は行列の積。