121015 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 6 回

6.1 行列の積

m 個の成分からなる行ベクトル $(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_m)$ と

同じく m 個の成分からなる列ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ の積を, 1 次形式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k b_k$ で定義する。

m の小さいところでは

$$(a_1\ a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2, \quad (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

なぜ横と縦の数の並びの積なのかは，一般に行列の積を定義すると分かる。
一般には

積の定義

2 つの行列 A, B の積 AB は，A の列数と B の行数が同じときのみ定義される。
A を k 行 m 列の行列 $A = (a_{ij})$ $(1 \leqq i \leqq k,\ 1 \leqq j \leqq m)$,
B を m 行 n 列の行列 $B = (b_{ij})$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ とするとき,
積 AB の (i, j) 成分は $\displaystyle\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}$ である。

例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap_1 + bq_1 & ap_2 + bq_2 \\ cp_1 + dq_1 & cp_2 + dq_2 \end{pmatrix}$$

6.2 行列の演算の性質

行列の演算については次のことがいえる。

加法について，

$A+B=B+A,\quad (A+B)+C=A+(B+C)$　つまり加法は順序に依らない。

実数倍について，

$(k+l)A=kA+lA,\quad k(A+B)=kA+kB$　分配法則が成り立つ。

減法と実数倍

$A-B=A+(-B)$

また，等式において，移項ができる。$X+A=B \Longleftrightarrow X=B-A$

積について，

$(AB)C=A(BC)$　結合法則が成り立つ。

一般に AB と BA は等しくない。

等しくない例を作れ。また，等しくなる例を作れ。

$A=O$ または $B=O$ は $AB=O$ の十分条件ではあるが必要条件ではない。

ここで，O は零行列である。$AB=O$ であるが零行列でない A, B のことを零因子という。例を作れ。

$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$　分配法則が成り立つ。

一般には $(A+B)^2$ と $A^2+2AB+B^2$ は等しくない。

等しくない例を作れ。また，等しくなる例を作れ。

行列の演算はもちろん成分で定義されている。しかし，このような性質をもつ。そして，問題を考察する際に成分まで言及する問題は，ただの計算 (TDN) である。大抵の問題は，ある条件下での行列の性質を見るので，成分計算をすることは少ない。

いくつかの数の並びを 1 文字の A とおいて計算することは，とても意義深い。多項式を $f(x)$ とおいたり，複素数を α とおいたり，ベクトルを $\vec{a}$ とおいたりして，計算するのも同様である。