121018 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 7 回

7.1 逆行列

正方行列 A に対して $AX=E$ となる X を A の (右) 逆行列という。A によっては，存在しないこともある。存在したとき A^{-1} とかく。

逆行列の性質

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

実際，$AX=E$ のとき，$XY=E$ なる Y の存在を仮定する。
$XA=XAE=XA(XY)=X(AX)Y=XEY=XY=E$
したがって，$AX=E$ かつ $XY=E$ なる Y が存在するならば，$XA=E$
これは，右逆行列が存在するならば，それは左逆行列も存在して一致するという，逆行列の性質の証明には不十分である。A に対する X の存在は仮定しているが，それだけで X に対する Y の存在がいえないからである。論理の飛躍はしっかり埋めなくてはならない。高校生の文章を読んでいると，そのあたりがとても甘くて，ひどいのになると，成り立つのだからいいでしょ，なんて証明ということを理解していないことを言い放つものがいて，社会の知的レベルの低下を嘆かざるを得ない。ごまかすのも先に進むには大切なときがあるけど，ごまかしたことを申し訳なく思ったり，ごまかしたことを覚えておいて，いずれ何とかするという姿勢がないと数学をやっているとはいえない。このあたりは，微妙なさじ加減で，厳密さを要求すると，発達段階にはあわず，ごまかすと，いつまでたっても成長しない。行列の場合はちゃんと成分を使って証明すべきことのようだ。
だが，それはちゃんと証明されているので，右逆行列は存在すれば，左逆行列も存在して，かつそれは一致する，すなわち，逆行列は可換である，としてよいことにする。

2 次正方行列の逆行列を具体的に求めてみよう。
クラメルの公式を確認する。

クラメルの公式

連立方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の解は

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $(=\Delta$ とおく$)$ が 0 でないとき，　$x=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}/\Delta,\quad y=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}/\Delta$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX=E$ とすると,
$\varDelta=ad-bc$ が 0 でないならば,
$\begin{cases} ax_1+by_1=1 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$ を (クラメルの公式で) 解いて, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d/\varDelta \\ -c/\varDelta \end{pmatrix}$
$\begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=1 \end{cases}$ を (クラメルの公式で) 解いて, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b/\varDelta \\ a/\varDelta \end{pmatrix}$
成分で書いてしまえば，逆行列の性質 (左逆行列の存在と右逆行列との一致) はただの計算 (TDN) である。

2 次正方行列の逆行列

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。
行列 A の行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値が 0 でないならば，A の逆行列が存在して,
$\varDelta=\det(A)=ad-bc$ として,
$A^{-1}=\dfrac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
3 次以上の正方行列はこのように単純ではない。

例題
AB の逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ であることを示す。
$B^{-1}A^{-1}=X$ とおく。
$ABX=ABB^{-1}A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$　したがって X は AB の右逆行列
$XAB=B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$　したがって X は AB の左逆行列
よって，AB の逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ である。(本当はどちらかだけでよい。)

例題
$AX=B$ のとき，A に逆行列が存在するならば，$X=A^{-1}B$
$XA=B$ のとき，A に逆行列が存在するならば，$X=BA^{-1}$