121021 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第８回

今回は行列による表現を考察してみる。
表現という言葉は，私は好きである。日常用語では，自分の考えを表現するというように言葉を使う。言葉であったり，音楽であったり…
行列はいろいろなことが表現できる。今回はいわゆる１次変換以外の話しをするつもりだが，結局１次変換になってしまうのだな。行列の積だから。

8.1 連立方程式

連立方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ を行列で表現する。
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,　$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とすると，$AX=B$ と表すことができる。

A の行列式が 0 でなければ，A^{-1} が存在するので，
この式の両辺に左から掛けて，$X=A^{-1}B$
このように行列を使って，２元１次連立方程式を解くことができる。

8.2 実数倍

行列 A の k 倍は，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ である。
$kA=kEA=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}A$ である。
すなわち，k 倍は行列 kE を掛けることで表現される。

8.3 いろいろな表現

8.3.1 行実数倍 列実数倍

$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$,　$M=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とする。

$$MX=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 \\ by_1 & by_2 \end{pmatrix}$$

$$XM=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 \\ ay_1 & by_2 \end{pmatrix}$$

8.3.2 行置換 列置換

$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$,　$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$$MX=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$XM=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

8.3.3 掃き出し

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$MX = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - qy_1 & x_2 - qy_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

$XM = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -qx_1 + x_2 \\ y_1 & -qy_1 + y_2 \end{pmatrix}$

例

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

これって，互除法じゃないか。

8.3.4 複素数

$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ とする。

$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

これは複素数の積である。

i を虚数単位，a_1, a_2, b_1, b_2 は実数とする。

$(a_1 + a_2i)(b_1 + b_2i) = (b_1 + b_2i)(a_1 + a_2i) = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$J^2 = -E, \quad$ 実は $A = a_1E + a_2J,\ B = b_1E + b_2J$ で，

$AB = (a_1E + a_2J)(b_1E + b_2J) = (a_1b_1)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J + (a_2b_2)J^2$

$= (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$

$BA = (b_1E + b_2J)(a_1E + a_2J) = (a_1b_1)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J + (a_2b_2)J^2$

$= (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$

2 次正方行列ですら，行列は強力。四元数を表現することもできる。

J は何をするかというと，$J \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ だから，

$\vec{u} = (a, b),\ \vec{v} = (-b, a)$ とすると，$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

この話題は回転につながる。