121024 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 9 回

ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem) と行列のべき乗を考察してみる。

9.1 特性多項式

特性多項式

正方行列 A に対して，
$A - xE$ の行列式を A の特性多項式という。

例
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，$A - xE = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$ だから，
特性多項式は $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$

9.2 ハミルトン・ケーリーの定理

ハミルトン・ケーリーの定理

正方行列 A について，
A は A の特性多項式の零点である。

例
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると
$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$

一般の場合の証明はちゃんとした本に書かれている。2 次正方行列の場合は，TaDaNo 計算である。

例
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$A^2 - 4A + 5E = O$

9.3 定理の逆

$A^2-4A+3E=O$⋯☆を満たす行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$a+d$ (A のトレース (跡, trace, Spur)) と $ad-bc$ (A の行列式 (determinant)) を求めてみる。

$a+d=p,\ ad-bc=q$ とおけば，この A について，Cayley-Hamilton theorem より $A^2-pA+qE=O$ が成り立つから，☆とあわせて，$(p-4)A=(q-3)E$

この等式より，

(i) $p=4$ ならば，$q=3$

(ii) p が 4 でないとき，$k=\dfrac{q-3}{p-4}$⋯☆☆とおいて，

A は単位行列の k 倍　すなわち，$A=kE$

☆より $k^2-4k+3=0$　(☆☆で $a=d=k,\ b=c=0$ を使ってもよい)

これをといて，$k=1,2$

(i)(ii) より，$(a+d, ad-bc)=(4,3),(2,1),(4,4)$

9.4 行列のべき乗への応用

例

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ について，$A^2+2A+4E=O$

すなわち，$A^2=-2A-4E$

$A^3=-2A^2-4A=-2(-2A-4E)-4A=8E$

$A^4=8A$

-4			-4	8	0
-2		-2	4	0	
	1	-2	0	8	0

(x^4 を x^2+2x+4 で割った余りが $8x$ であることを計算した図。ひとつ前まででやめると，x^3 の余りが 8 であることもわかる。)

例

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ について，$A^2-2A+4E=O$

すなわち，$A^2=2A-4E$

$A^3=2A^2-4A=2(2A-4E)-4A=-8E$

$A^4=-8A$

-4			-4	-8	0
2		2	4	0	
	1	2	0	-8	0