121025 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

行列と行列式　第 10 回

固有値 (eigenvalue) と行列のべき乗を考察してみる。

10.1 固有値

行列 A と列ベクトル $\vec{x}$, 実数 k について，
零ベクトルでない $\vec{x}$ が $A\vec{x} = k\vec{x}$ を満たすとき，k を A の固有値，$\vec{x}$ を A の k に対する固有ベクトルという。

次の変形は重要である。
$A\vec{x} = k\vec{x} \iff A\vec{x} = kE\vec{x} \iff (A - kE)\vec{x} = \vec{0}$
特性多項式が連想できただろうか。

特性多項式 characteristic polynomial

正方行列 A に対して，
$A - xE$ の行列式を A の特性多項式という。

行列 $A - kE$ が逆行列をもつならば，$\vec{x}$ は零ベクトル以外にはない。$\vec{x}$ が零ベクトルでないならば，$A - kE$ は逆行列をもたない。すなわち，固有値は特性多項式の零点である。

例
$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，A のトレースは 3, 行列式の値は 2 だから，
固有値は，$k^2 - 3k + 2 = 0$ の解で，$k = 1, 2$

$k = 1$ に対する固有ベクトル (eigenvector) を求めてみる。
$A - E = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ だから，$\vec{x}$ のひとつは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。
確かに $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k = 2$ に対する固有ベクトル (eigenvector) を求めてみる。
$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ だから，$\vec{x}$ のひとつは，$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。
確かに $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

10.2 応用

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を α, β として，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = B$ とおいて，B が逆行列をもつならば，

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

行列 A の対角化という。

次の計算は有名である。

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ および $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

実際に確かめてみよ。

したがって，$A^n = B\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}B^{-1}$

例

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として，$\quad AB = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{hence } B^{-1}A^nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

したがって，$A^n = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

あとは TaDaNo 計算である。