121027 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

行列と行列式　第 7 回の 2

7.2 逆行列をもたない

A の行列式の値が 0 ならば，またこのときに限り逆行列をもたない。
例えば，2 次の正方行列の場合を考えてみる。
$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ や，$\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないことは，すぐに分かる。
また，$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ や，$\begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないことも，すぐに分かる。

逆という命題は，もとの命題が真であるとき，真であるのが当たり前というように思い込んでいる諸君が，まだまだいるが，これは証明するべきことである。

逆行列をもたない行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ とする。
A が逆行列をもたないならば，$\vec{u}$ は零ベクトルかさもなくば $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行である。
後者は，There exists k such that $\vec{v} = k\vec{u}$
(いうまでもないが $k = 0$ のとき，$\vec{v}$ は零ベクトル)

実際，逆行列をもたないことと $\Delta = ad - bc = 0$ であることは同値である。
(i) a が 0 であるとき。
$\Delta = 0$ だから，"$b = 0$" または "$b \neq 0$ ならば $c = 0$"
(i-a) $b = 0$ のとき，$\vec{u} = (0, 0)$
(i-b) $b \neq 0$ のとき，$\vec{v} = (0, d) = \dfrac{d}{b}\vec{u}$
(ii) a が 0 でないとき，
$c = ka$ なる k をとって，$\Delta = ad - bc = ad - b(ka) = a(d - bk)$
仮定よりこれは 0 で，$a \neq 0$ より，$d - bk = 0$　　すなわち $d = bk$
よって，$\vec{v} = k\vec{u}$