121027 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 12 回

12.1 点の変換

平面上の各点 (x, y) について，ある規則があって (x', y') が対応するとき，その規則を変換という。

例えば, x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動するということは，平面上の各点 (x, y) を $(x+1, y-2)$ に対応させる変換である。

記号を使って，$f:\ (x, y) \mapsto (x+1, y-2)$ と書くことがある。

変換 $f:\ (x, y) \mapsto (x', y')$ において，像 (image) (x', y') が (x, y) の 1 次形式であるとき，すなわち，$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ となる定数 a, b, c, d が存在するとき，この変換を 1 次変換という。

1 次変換は行列を使って表すことができて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 1 次変換 f の表す行列という。

例 1 (たどってみよう。確かめてみよう。)

x 軸に関する対称 $(x, y) \mapsto (x, -y)$　これは 1 次変換で表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

例 2 (たどってみよう。確かめてみよう。)

y 軸に関する対称 $(x, y) \mapsto (-x, y)$　これは 1 次変換で表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

例 3 (たどってみよう。確かめてみよう。)

原点に関する対称 (原点に関する 180° 回転) $(x, y) \mapsto (-x, -y)$

これは 1 次変換で表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

例 4 (たどってみよう。確かめてみよう。)

原点に関する 90° 回転 $(x, y) \mapsto (-y, x)$　これは 1 次変換で表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

例 5 (たどってみよう。確かめてみよう。)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換は，原点中心 $\sqrt{2}$ 倍の相似変換と原点中心 45° 回転の合成である。

12.2 回転

点 (x, y) を原点中心 θ 回転したときの像 (x', y') について，この変換は 1 次変換かどうかみてみる。

$\vec{p} = (x, y)$ において，$\vec{p_x} = (x, 0)$, $\vec{p_y} = (0, y)$ とおくと，$\vec{p} = \vec{p_x} + \vec{p_y}$

$\vec{p_x}$ を原点中心 θ 回転すると，三角関数の定義により，$(x\cos\theta, x\sin\theta) = \vec{p_x}'$

$\vec{p_y}$ を原点中心 θ 回転すると，三角関数の定義により，$(y\cos(\theta + 90°), y\sin(\theta + 90°)) = \vec{p_y}'$

$\vec{p}$ の像は $\vec{p'} = \vec{p_x}' + \vec{p_y}'$　(注目すべき式　和の像は像の和)

$\vec{p'} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

よって，原点中心の回転は 1 次変換で，それを表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

この行列はいくつかの特徴がある。

(1) 行列式の値が 1

(2) 左上と右下の成分の値は等しい。右上と左下の成分の和は 0.

4 つの成分を使って行列で表現しているが，実際の自由度は 1 である。