121027 初版
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第13回

13.1 合成変換

(x,y) の変換 f による像を，さらに g で変換した像を (x'',y'') とする。この対応はひとつの変換と見ることができる。これを f と g の合成変換といい，$g\circ f$ とかく。

1次変換 f, g の表す行列をそれぞれ A, B とすると，$g\circ f$, $f\circ g$ の表す行列はそれぞれ，BA, AB である。

問い　このことを確かめなさい。

例1 (たどってみよう。確かめてみよう。)
x 軸に関する対称移動を f とすると，合成変換 $f\circ f$ は恒等変換となる。

例2 (たどってみよう。確かめてみよう。)
x 軸に関する対称移動を f とし，y 軸に関する対称移動を g とすると，合成変換 $g\circ f$ と $f\circ g$ はともに，原点に関する対称移動である。

例3 (たどってみよう。確かめてみよう。)
原点中心 $\sqrt{2}$ 倍相似変換を f とし，原点中心 $45°$ 回転を g とする。
f の表す行列は $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$，$g$ の表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ である。
合成変換 $g\circ f$ と $f\circ g$ の表現行列はともに，g の表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

例4 (たどってみよう。確かめてみよう。)
x 軸に関する対称移動を f とし，原点中心90回転を g とする。
f の表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$g$ の表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。
合成変換 $g\circ f$, $f\circ g$ の表現行列はそれぞれ，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。
$g\circ f$ は直線 $y=x$ に関する対称移動，$g\circ f$ は直線 $y=-x$ に関する対称移動である。

例5 (たどってみよう。確かめてみよう。)
原点中心 α 回転と原点中心 β 回転と合成すると，原点中心 $\alpha+\beta$ 回転となる。行列で表すと，
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ であるが，
右辺は行列の積を計算すると。$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ と書くとき，
$a=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $b=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ である。三角関数の加法定理が示された。

13.2 逆変換

$f:\ (x_1, y_1) \mapsto ({x_1}', {y_1}')$，$f:\ (x_2, y_2) \mapsto ({x_2}', {y_2}')$ とする。
$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ ならば $({x_1}', {y_2}') \neq ({x_2}', {y_2}')$ が成り立つとき，
対応 $({x_2}', {y_2}') \mapsto (x_2, y_2)$ は変換と見ることができる。これを f の逆変換といい，f^{-1} とかく。

1 次変換 f の表す行列を A, B とすると，f^{-1} の表す行列は A^{-1} である。

問い　このことを確かめなさい。

例 1 (たどってみよう。確かめてみよう。)
x 軸に関する対称移動を f とすると，f^{-1} は f に等しい。

例 2 (たどってみよう。確かめてみよう。)
原点中心 45° 回転を g とする。g^{-1} は原点中心 -45° 回転であり，確かに，表現行列は逆行列になっている。

13.3 直線に関する対称移動

直線 $l:\ y = \frac{1}{3}x$ に関する対称移動は 1 次変換であることをみてみよう。

もとの点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする。この対称移動による像を $\mathrm{Q}(x', y')$ とする。
PQ の中点はこの直線上にあるから，$\frac{1}{3}\left(\frac{x+x'}{2}\right) = \frac{y+y'}{2}$
すなわち，$-x' + 3y' = x - 3y$
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はこの直線 (方向ベクトル $(3, 1)$) の法線ベクトルであるから，$3(x' - x) + (y' - y) = 0$
すなわち，$3x' + y' = 3x + y$
行列で表すと，$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ として，$B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
したがって，この変換は 1 次変換であり，変換を表す行列は $B^{-1}A$ で

$$B^{-1}A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

別の見方をしてみよう。
θ は鋭角で，$\tan\theta = \frac{1}{3}$ とする。
原点中心 θ 回転を f とする。x 軸に関しての対称移動を g とする。
l に関しての対称移動は $f \circ g \circ f^{-1}$ である。
この変換を表す行列は $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (ここで $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$)
すなわち $\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix}$ である。　三角関数で表せば，$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ である。
$\tan\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$ であるから，
求める行列は同じく，$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$