121027 初版　121030 更新
http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式　第 14 回

14.1 正射影

正射影

$\vec{p}, \vec{a}$ に対して，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる 3 点 O, A, P をとる。
直線 OA に P から垂線 PH を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影という。

正射影の大きさ

$\vec{h}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影とするとき，$|\vec{h}| = \dfrac{|\vec{p} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

確かめてみよ。

正射影 2

$\vec{h}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影とするとき，$\vec{h} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}$

最後の式は，おもむきがある。

14.2 応用 1

直線 l： $y = mx$ に関する対称移動を考える。
$\mathrm{P}(x, y)$ に対して対称点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とする。
$\vec{p} = (x, y), \vec{q} = (x', y'), \vec{d} = (1, m)$ とする。$\vec{d}$ は l の方向ベクトルである。
$\vec{p}$ の $\vec{d}$ への正射影ベクトルは, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2}\vec{d} = \left(\dfrac{x + my}{1 + m^2}\right)\vec{d}$
点 H は線分 PQ の中点だから，$\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} x + my \\ mx + m^2 y \end{pmatrix}$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = \frac{2}{1+m^2}\begin{pmatrix} x + my \\ mx + m^2 y \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} (1-m^2)x + 2my \\ 2mx + (m^2-1)y \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

14.3 応用 2

四面体 OABC の体積 V を求めてみる。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。
底面を平面 OAB にとる。平面 OAB の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると，高さ h は $h=\dfrac{|\vec{c}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$
特に C から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB との交点を H とすると，
$h=\mathrm{CH}=\dfrac{-\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}}{\mathrm{CH}}$ すなわち，$h^2=\mathrm{CH}^2=-\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると，
OA と CH は垂直だから，$s\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$
OB と CH は垂直だから，$s\vec{b}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

クラーメルの公式を使って，s,t を求める。
$\varDelta_{cc}=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b}\end{vmatrix}$, $\quad\varDelta_{ca}=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$, $\quad\varDelta_{cb}=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$ とおくと，
$s=-\dfrac{\varDelta_{ca}}{\varDelta_{cc}},\quad t=\dfrac{\varDelta_{cb}}{\varDelta_{cc}}$

また，三角形 ABC の面積 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\varDelta_{cc}}$

さて，$h^2=-\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-s\vec{c}\cdot\vec{a}-t\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$
よって，$4h^2S^2=\varDelta_{ca}\vec{c}\cdot\vec{a}-\varDelta_{cb}\vec{c}\cdot\vec{b}+\varDelta_{cc}\vec{c}\cdot\vec{c}$
これは，余因子展開を逆に使って，
$4h^2S^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$
$V=\frac{1}{3}hS$ だから，

$$36V^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$$