121027 初版 121030 更新

http://goo.gl/MFRFj

行列と行列式 第14回

14.1 正射影

正射影

 $ec{p}, \ ec{a}$ に対して, $ec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \ ec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる 3 点 $\mathrm{O, A, P}$ をとる。 直線 OA に P から垂線 PH を引く。 \overrightarrow{OH} を \vec{p} の \vec{a} への正射影という。

正射影の大きさ -

$$ec{h}$$
 を $ec{p}$ の $ec{a}$ への正射影とするとき , $|ec{h}| = rac{|ec{p} \cdot ec{a}|}{|ec{a}|}$

確かめてみよ。

正射影 2.

$$ec{h}$$
 を $ec{p}$ の $ec{a}$ への正射影とするとき , $ec{h}=rac{ec{p}\cdotec{a}}{|ec{a}|^2}ec{a}=rac{ec{p}\cdotec{a}}{ec{a}\cdotec{a}}ec{a}$

最後の式は,おもむきがある。

14.2 応用 1

直線 l: y = mx に関する対称移動を考える。

P(x,y) に対して対称点を Q(x',y') とする。

 $\vec{p}=(x,y),\, \vec{q}=(x',y'),\, \vec{d}=(1,m)$ とする。 \vec{d} は l の方向ベクトルである。

$$ec{p}$$
の $ec{d}$ への正射影ベクトルは $, \ \overrightarrow{\mathrm{OH}} = rac{ec{p} \cdot ec{d}}{|ec{d}|^2} ec{d} = \left(rac{x+my}{1+m^2}
ight) ec{d}$

 \vec{p} の \vec{d} への正射影ベクトルは、 $\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \left(\frac{x+my}{1+m^2}\right) \vec{d}$ 点 \mathbf{H} は線分 \mathbf{PQ} の中点だから , $\left(\begin{array}{c} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \end{array}\right) = \frac{1}{1+m^2} \left(\begin{array}{c} x+my \\ mx+m^2y \end{array}\right)$

$$\iff \left(\begin{array}{c} x+x'\\ y+y' \end{array}\right) = \frac{2}{1+m^2} \left(\begin{array}{c} x+my\\ mx+m^2y \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} (1-m^2)x + 2my \\ 2mx + (m^2-1)y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \frac{2}{1+m^2} \begin{pmatrix} x+my \\ mx+m^2y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} (1-m^2)x+2my \\ 2mx+(m^2-1)y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

14.3 応用 2

四面体 OABC の体積 V を求めてみる。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$
とする。

底面を平面 OAB にとる。平面 OAB の法線ベクトルを $ec{n}$ とすると , 高さ h は $h=rac{|ec{c}\cdotec{n}|}{|ec{n}|}$ 特にCから平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB との交点を H とすると,

$$h={
m CH}=rac{-ec c\cdot \overrightarrow{
m CH}}{{
m CH}}$$
 すなわち , $h^2={
m CH}^2=-ec c\cdot \overrightarrow{
m CH}$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とすると,

OA と CH は垂直だから , $s\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

OB と CH は垂直だから, $s ec{b} \cdot ec{a} + t ec{b} \cdot ec{b} = ec{b} \cdot ec{c}$

$$\Delta_{cc} = \left| egin{array}{cc} ec{a} \cdot ec{a} & ec{a} \cdot ec{b} \ ec{b} \cdot ec{a} & ec{b} \cdot ec{b} \end{array}
ight|, \quad \Delta_{ca} = \left| egin{array}{cc} ec{a} \cdot ec{b} & ec{a} \cdot ec{c} \ ec{b} \cdot ec{b} & ec{b} \cdot ec{c} \end{array}
ight|, \quad \Delta_{cb} = \left| egin{array}{cc} ec{a} \cdot ec{a} & ec{a} \cdot ec{c} \ ec{b} \cdot ec{a} & ec{b} \cdot ec{c} \end{array}
ight| \, \mathcal{L}$$
 $s = -rac{\Delta_{ca}}{\Delta_{cc}}, \quad t = rac{\Delta_{cb}}{\Delta_{cc}}$

また,三角形 ABC の面積 $S=rac{1}{2}\sqrt{\Delta_{cc}}$

さて, $h^2 = -\vec{c} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} = -s\vec{c} \cdot \vec{a} - t\vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}$ よって , $4h^2S^2=\Delta_{ca}\vec{c}\cdot\vec{a}-\Delta_{cb}\vec{c}\cdot\vec{b}+\Delta_{cc}\vec{c}\cdot\vec{c}$ これは,余因子展開を逆に使って,

$$4h^2S^2=\left|egin{array}{cccc} ec{a}\cdotec{a} & ec{a}\cdotec{b} & ec{a}\cdotec{c} \ ec{b}\cdotec{a} & ec{b}\cdotec{b} & ec{b}\cdotec{c} \ ec{c}\cdotec{a} & ec{c}\cdotec{b} & ec{c}\cdotec{c} \ \end{array}
ight| V=rac{1}{3}hS$$
だから ,

$$36V^2 = \left| \begin{array}{ccc} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{array} \right|$$