120909 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 1 回

数学の問題には 4 種類あって，
1. 数学の理論を確かめるための例
2. 数学の知識を使った問い合わせ
3. 題材の性質が自然と現れてくる例題
4. 現象の数理を分析する発展問題

3,4 については，学習に時間がかかる。ここはある意味高校数学の醍醐味で 3 年生を中心にじっくりやりたい。

かといって，1,2 がつまらないわけではない。これ以降の数学，理学，工学の基礎であるから。1,2 についてはできるだけ早い段階で取得するべきだと思う。数学的な見方・考え方は一朝一夕で学べるものではない。1,2 についてもそうで，人生の折り返しが過ぎた今でも，問題を解くと，高校数学の基礎理論はまだまだ深いなと思うことがある。しかし，ここでは，できるだけ手軽に高校数学の内容を理解するための，読んだらすぐに教科書傍用問題集に取り組むための，一助となるように書いた。練習問題は提出してもらってかまわない。

ベクトルは，物理からの要請である。数学では，そこから少し抽象化して，ベクトルの代数的な構造を学び，幾何学への応用を図る。大学へ行くとさらに線型代数，ベクトル解析へと抽象化されるが，高校のベクトルと，線型代数とは全くといっていいほど違うものである。高校のベクトルは工学を理解するためにあるようだ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{a}$ の違いはなんだろう。

これは極めて数学的な話題である。高校のベクトルは先に述べたように工学からの要請であるので，(高校 2 年の数学自体が，質の高い技術者を養成するカリキュラムだというのが私の主張である。) 有向線分だと思ってほぼ間違いない。

ベクトルとは，大きさと向きをもつ量である。

学習段階によって定義が変わるので，これでよいし，ベクトルとは有向線分である，としてよい。

矢印の集合に代数的な構造を入れることにする。(あるいは物理を記述するための言語としてのベクトルの代数的な性質をみることにする。)

2 点 A, B があったとき，A から B へ結んだ向きのある線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く。

2 つの有向線分が平行移動で重なるとき，等しいという。

例　(例は数学の理論を学ぶ上で最も大切なことだから，理解につとめよう。)

平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は大きさ (長さ) は等しいが，ベクトルとしては等しくない。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{a}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を零ベクトルといい $\vec{0}$ とかく。零ベクトルと零は違う。違いがわからないものは，まだ零が理解できていない。

例　(例は数学の理論を学ぶ上で最も大切なことだから，理解につとめよう。)
$1-1=2-2=3-3=\dfrac{4}{6}-\dfrac{2}{3}=0$
$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\overrightarrow{\mathrm{CC}}=\overrightarrow{\mathrm{PP}}=\vec{0}$

つまり，$\vec{a}$ という小文字 1 文字でベクトルを表す場合は，等しいベクトルの代表である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は A から B へ向かう矢印という，有向線分の実体を表す。
このように，初等教育で習った実数や整式の代数構造を，ベクトルという教材を使って見直している。

$\vec{a}$ と同じ方向で大きさ (長さ) が k 倍のものを $\vec{a}$ の k 倍といって $k\vec{a}$ とかく。正確には，
$k=0$ のとき $k\vec{a}=\vec{0}$
$k>0$ のとき $k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで長さが k 倍
$k<0$ のとき $k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と逆向きで長さが $-k$ 倍
このように，負の数を再定義している。
記法の注意としては実数はベクトルの左から掛けることにする。

また $-\vec{a}$ を $\vec{a}$ の逆ベクトルという。

例
平行四辺形 ABCD において，辺 AD の 3 等分点を A に近いほうから M, N. 辺 BC の 3 等分点を B に近いほうから P, Q とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，
$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{NQ}}=\vec{a}$
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\vec{a}$
$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　まだあるが，各自であげてみよ。
$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{QB}}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　まだあるが，各自であげてみよ。

例
線分 AB について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ とする。
AB を 2:3 に内分する点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=-\dfrac{3}{5}\vec{a}$
AB を 4:1 に外分する点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$
AB を 1:4 に外分する点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=-\dfrac{4}{3}\vec{a}$

気がついただろうか。いろいろな点をとったが，平面だとか空間だとかは言っていない。平面でしか成り立たないことがあれば，注釈をつける。