120909 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

教本 ベクトル　第 2 回

$\vec{a}+\vec{b}$ を定義する。
$\overrightarrow{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と 3 点 A, B, C をとる。(ここでも平面だとか空間だとかはいっていない) このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をもって $\vec{a}+\vec{b}$ とする。有向線分の和は矢印の継ぎ足しだといえる。
このとき，平行四辺形 ABCD を考える。
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ であるから，最初は継ぎ足しだといったが，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を解釈すると，$\vec{a}, \vec{b}$ の始点を同じにして，その点 A から平行四辺形の対角線に向かう矢印が和であり，有向線分の和は矢印の合成であるといえる。

矢印の計算の代数的構造を探索しているのだが，例えば自然数の和でも 2 つの見方がある。継ぎ足しと合併である。

例
A さんはおはじきを 8 個もっています。さらに 4 個買い足します。合わせて 12 個になります。
A さんはおはじきを 8 個もっています。B さんは 4 個もっています。二人合わせて 12 個です。

この平行四辺形 ABCD の考察から $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}+\vec{a}$ が等しいことがわかる。

問題
これが成り立つことを証明せよ。

ベクトルの和の交換法則であるが，これが成り立つのは公理ではない。自然数の和でも交換法則は天賦のものではない。発達段階に合わせて，学習活動があるから，小学 1 年生に自然数の和の交換法則の証明はやらないが，数学基礎論では行われる。$1+2=3$ は定義であるが，$a+b=b+a$ は a, b が自然数であっても証明がある。あたりまえでしょ。というのはコドモの科白なのだ。

例題
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となるように A, B, C, D をとる。
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。
$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より，$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。
よって，ベクトルの和は結合法則が成り立つ。

$\vec{b}-\vec{a}$ を $\vec{b}+(-\vec{a})$ と定義する。
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると，$\vec{a}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$
このように，$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$ は証明できることである。
また，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ならば，$\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ である。つまり，等式において，移項が可能である。

問題
これが成り立つことを証明せよ。

例
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

次のようにもいえる。
例
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

ベクトルにおいて和は継ぎ足しと合成という 2 つの解釈があったが，差については，
1. $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$ という逆ベクトルの和
2. 三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ という変化量
という 2 つの解釈がある。

例
当初，原点より東に 300m の地点にいた A さんが，真西に 100m 動いたら，原点より東に 200m の地点にいる。
当初，原点より東に 300m の地点にいた A さんが，5 分後原点より東に 200m の地点にいる。A さんは 5 分間で真西に 100m 移動した。

さて，線分 AB とそれを 3:2 に外分する点 P を考えて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ とすると，$\vec{a}+2\vec{a}=3\vec{a}$ が証明できる。また，移項が可能だから，$3\vec{a}-2\vec{a}=\vec{a}$ が成り立つ。
一般にベクトルの実数倍と和に関する性質は

ベクトルの代数構造

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}, \quad k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ならば，$\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$
$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

問題
$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}, \vec{q}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}, \vec{r}=3\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}+5\vec{c}$ のとき，$\dfrac{3}{2}\vec{p}-\dfrac{1}{4}\vec{q}-\dfrac{4}{3}\vec{r}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

問題
$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}, \vec{q}=-2\vec{a}+3\vec{b}$ のとき，$\vec{a}, \vec{b}$ を $\vec{p}, \vec{q}$ で表せ。

というわけで，ここまでのベクトルの実数倍と和・差の計算は，多項式と同じようにできる。