120909 初版

http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第3回

次にベクトルの幾何的な性質を探索しよう。

矢印の長さを $\vec{a}$ の大きさといい，$|\vec{a}|$ とかく。
$|\vec{a}|=1$ であるベクトルを単位ベクトルという。

例
OA=8, OB=5, AB=7 である三角形 OAB において，
OA を 3:2 に内分する点を P, OB を 3:2 に内分する点を Q とすると，三角形 OPQ と三角形 OAB は相似で相似比は 3:5 である。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると，$|\vec{b}|=5$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{21}{5}$ である。
また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{8}$ である。
さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$,
PQ と AB は平行であるが，
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{a}=\dfrac{3}{5}(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

一般に次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行ならば，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する。逆も成り立つ。

問題
このことを証明せよ。

また，次のことが成り立つ。

3 点が一直線上にある条件

A, B, C が一直線上にあるならば，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する。逆も成り立つ。

例

線分 AB について，

AB を 2:3 に内分する点 M について，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

AB を 5:1 に外分する点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

AB を 1:5 に外分する点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

例

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ならば，M は線分 AB を 3:1 に内分する点である。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ならば，P は線分 AB を 7:3 に外分する点である。

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ならば，Q は線分 AB を 3:7 に外分する点である。

例題 (メネラウスの定理)

三角形 ABC において，

辺 AB, AC 上にそれぞれ P, Q をとり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BR}} = u\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とする。

3 点 P, Q, R が一直線上にあるときの s, t, u の関係式を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{BR}} = u\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = u(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = (1-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-u-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

P, Q, R は一直線上にある必要かつ十分な条件は，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる k が存在すること。

すなわち $1-u-s = k(-s)$, $u = k(1-t)$

ということは $(1-u-s) : u = (-s) : (1-t)$

よって，$(1-s)(1-t)(1-u) = -stu$

120909 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

教本 ベクトル　第 3 回の 2

平面上の3 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ について，$\vec{p}$ の $\vec{a}, \vec{b}$ への分解を次のように考える。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ となるように，同一平面上に O, A, B, P をとる。O, A, B は三角形をなすと仮定する。

P を通り直線 OA に平行な直線, 直線 OB に平行な直線を引くことによって，直線 OA, OB 上に点 A′, B′ をそれぞれとって，平行四辺形 OA′PB′ を作ることができる。

したがって，線分の長さの比を考えて s, t を $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めると，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$

2 つのベクトルの和を矢印の合成と見ることができるが，ベクトルの分解はちょうど合成の逆である。

線型独立 (大学受験数学用語では一次独立)

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，
$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ となる実数の組 (s, t) が自明なもの以外存在しないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は線型独立であるという。
このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない。

ベクトルの分解　アフィン成分

$\vec{a}, \vec{b}$ が線型独立であるとする。
平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，
$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数の組 (s, t) が一意に存在する。
(s, t) を，基底 $\vec{a}, \vec{b}$ に対する $\vec{p}$ のアフィン成分ということがある。

例

平行四辺形 OACB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

対角線 OC 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\vec{a}+\vec{b})$ なる 1 未満の正数 k が存在する。

OA, BC の中点をそれぞれ M, N とすると，線分 MN 上の点 Q には，1 未満の正数 u が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+u\vec{b}$ と表せる。

この例において，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+u\vec{b}$ とみることができるが，これはベクトルの和を矢印の継ぎ足しと見たときの逆を行っている。ベクトルの分解は継ぎ足しの逆と見ることもできる。

例

三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

角 AOB の二等分線上に点 P があるならば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる k が存在する。逆も成り立つ。