120917 初版
`http://goo.gl/MFRFj`

教本 ベクトル　第5回

ベクトルと幾何のつながりは，有向線分の実数倍や和・差という演算と図形のリンクももちろん大切だが，内積といわれるものが大変重要で，物理との関係も深い。

正射影

3点O, A, Bがあったとき，Bから直線OAに垂線BHをひく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルという。

例　(内容を理解するために，必ず確かめるべきである。)
OA=4, OB=6, $\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ のとき，
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルの大きさは3である。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルの大きさは2である。

ベクトルの内積

2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，
$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように，3点O, A, Bをとる。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルの大きさの積を，
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と記す。
すなわち，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角で $\angle\mathrm{BOA}$ のことである。

定義より直ちに，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
さらに，直ちに，

ベクトルの垂直条件

零ベクトルでない，2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，
2つのベクトルが垂直であるならば，内積は0である。
また，垂直でなければ内積は0にならない。

どうやら，内積は2つのベクトルのなす角に近い考えのようだ。実際，
$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Longleftrightarrow$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は鋭角である。
$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Longleftrightarrow$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は鈍角である。
一般に

ベクトルのなす角

零ベクトルでない，2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，
2つのベクトルのなす角 θ について，$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

例　数学の内容を理解したかったら，例は確実に辿ってみよう。

1 辺の長さが l である正三角形 OAB において，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}l^2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\dfrac{1}{2}l^2$

さらに，辺 AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3}{4}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

例　数学の内容を理解したかったら，例は確実に辿ってみよう。

$\mathrm{OA}=2l$, $\mathrm{OB}=l$ である長方形 OACB において，辺 OA, 辺 BC の中点をそれぞれ M, N とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-2$

例　数学の内容を理解したかったら，例は確実に辿ってみよう。

1 辺の長さが l である正六角形 ABCDEF において，対角線 AD と BE の交点を O とする。O はこの正六角形の中心である。三角形 OAB, OBC などは正三角形である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ など

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ など

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ など

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ など

$2\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ など

$\vec{a}+2\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ など

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}l^2$, $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}l^2$,

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$, $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\dfrac{3}{2}l^2$

この例は，内積の性質を使わずに，定義だけで辿ることができる。