120918 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 6 回

前回，内積を定義したが，ベクトルを成分で表したときの内積をみてみよう。

1 次形式

n 項の数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n と
n 個の変数 x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n があったとき，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ を 1 次形式という。
すなわち，$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n$
線型形式ということもある。

例　(内容を理解するために，必ず確かめるべきである。)
$(2, -3)$ を係数とする (x, y) の 1 次形式は $2x - 3y$ である。

成分と内積

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して，
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

これは内積の定義ではなくて，証明できることである。また，その証明は重要である。
$\vec{a}, \vec{b}$ の少なくともどちらかが零ベクトルのときは内積は 0 である。
どちらも零ベクトルでないとして，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように，3 点 O, A, B をとる。
(i) 3 点が一直線上にあるときは，明らかである。(各自で確かめてみよ)
(ii) 3 点で三角形 OAB ができるとき
3 点の座標は $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ となる。
$\angle\mathrm{AOB}(= \theta$ とおく$)$ は，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角である。
余弦定理により，$\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2}$
この分子は，距離公式により，
$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2$
$= ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2) = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
よって，$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

ベクトルのなす角

零ベクトルでない，2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，
2 つのベクトルのなす角 θ について，$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

例　数学の内容を理解したかったら，例は確実に辿ってみよう。
$\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (-1, 7)$ のとき，
$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 25$
なす角 θ の余弦は $\cos\theta = \dfrac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
したがって，なす角は 45° (弧度法で答えるなら $\dfrac{\pi}{4}$)