

ベクトルを幾何学に応用してみる。今回は点のベクトルでの表現について述べる。

位置を表す方法はどのようなものだろうか。平面や空間にただ1つだけ点があっても、何も意味を成さず、何のしようもない。

点が数個あったとき、そのうちの一つを基準点とする。

位置ベクトル

点の位置を表すために点と対応づけたベクトルを、位置ベクトルという。
具体的には、点の中から基準点(観測者原点)を設ける。その点を例えば O とする。
平面や空間内の任意の点 P は、 O から有向線分を引くことができる。例えば \vec{OP} である。
これをこの点 P の位置ベクトルという。

例 (内容を理解するために、必ず確かめるべきである。)

平行四辺形 $ABCD$ において、

$\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{d}$ とする。

これは点の中から基準点を A として、 \vec{b} は B の位置ベクトル、 \vec{d} は D の位置ベクトルであることをいっている。

このとき、 C の位置ベクトルは \vec{AC} であるが、 $\vec{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ である。

AB の中点の位置ベクトルは $\frac{1}{2}\vec{b}$ 、 BC を $1:3$ に内分する点の位置ベクトルは $\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}$ である。

例 (内容を理解するために、必ず確かめるべきである。)

座標平面上の任意の点 $P(x, y)$ について、原点 $O(0, 0)$ を基準とした P の位置ベクトルを \vec{p} とすると、そのベクトルを成分で表せば、 $\vec{p} = (x, y)$ である。位置ベクトルは座標の一般化と見ることができる。逆に、原点を基準点とした平面上の点の位置ベクトルを正規直交分解したものが、 xy 直交座標である。

点 A の位置ベクトルが \vec{a} であることを、 $A(\vec{a})$ とかく。

移動量

2点 A, B が $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ であるとき、

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

これは基準点の取り方に依らないので、相対性原理といわれることがある。

実際、 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{MB} - \vec{MA} = \vec{NB} - \vec{NA} = \dots$

第2式は O を基準とした位置ベクトルの差、第3式は M を基準としたものと見ることができる。

内分点・外分点の公式

2点 A, B が $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ であるとき,

線分 AB を $m:n$ に内分する点の位置ベクトルは, $\frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$ である。

線分 AB を $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは, $\frac{-n}{m-n}\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}$ である。

外分点は $\frac{n}{-m+n}\vec{a} + \frac{-m}{-m+n}\vec{b}$ といってもいい。

内分点だけ示すが, 実際, AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると, $AP:BP = m:n$ で, 3点是一直線上にあるから, $\vec{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{AB}$

この等式を変形して $\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$

ゆえに, $\vec{p} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$

例 (内容を理解するために, 必ず確かめるべきである。)

平行四辺形 ABCD において,

$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{d}$ とする。

AB の中点を M, AD を 1:3 に内分する点を N とする。

MN を 2:1 に内分する点 P の位置ベクトルを求めてみる。

$\vec{MP} = \frac{2}{3}\vec{MN}$ より, 有名な変形によって,

$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AM} + \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{d}\right)$, すなわち $\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{d}$ である。

中点の位置ベクトル

2点 A, B が $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ であるとき,

線分 AB の中点の位置ベクトルは, $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ である。

重心の位置ベクトル

三角形 ABC において, $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ であるとき,

三角形 ABC の重心の位置ベクトルは, $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ である。

実際, 重心は中線 AM を 2:1 に内分する点だから。