121010 初版　121031 更新
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 9 回

ベクトルを幾何学に応用してみる。今回は有名な問題を 2 題解いてみる。

3 点が一直線上にある条件

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ が一直線上にある。
$\iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ なる実数 k が存在する。
$\iff \vec{c} - \vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a}) \iff \vec{c} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}$
$\iff \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき $s + t = 1$

最後は重要な変形である。

例題 1

平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2:1 に内分する点を P, 対角線 BD を 3:1 に内分する点を Q とするとき，3 点 A, P, Q は一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
$\overrightarrow{CP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ で，有名な変形により，
$\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \vec{d}$
$\overrightarrow{BQ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ で，有名な変形により，
$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{3}{4}\vec{d}$
よって，$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AP}$
したがって，3 点 A, P, Q は一直線上にある。

例題 2

三角形 OAB において，辺 OA を 2:1 に内分する点を C, 辺 OB を 3:2 に内分する点を D とし，線分 AD と BC との交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

A, D, P は同一直線上にあるから，$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AD}$ とかける。
すなわち，$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} = (1-s)\vec{a} + \dfrac{3}{5}s\vec{b}$
B, C, P は同一直線上にあるから，$\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ とかける。
すなわち，$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$
$k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0}$ となる k, l はともに 0 しかないので，この表し方は一意であるはず。
$1 - s = \dfrac{2}{3}t$, $\dfrac{3}{5}s = 1 - t$
これを解いて，$s = \dfrac{5}{9}$, $t = \dfrac{2}{3}$
よって，$\overrightarrow{OP} = \dfrac{4}{9}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$