121015 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 10 回

ベクトルを幾何学に応用してみる。今回は図形をベクトルで表現してみる。
位置ベクトルの満たしている関係式をベクトル方程式という。
図形とベクトル方程式の関連づけを考察する。座標で表したとき，直線と関連付けられた方程式は実質 1 つであったが，ベクトル方程式は，図形の見方によって変わってくる。

直線のベクトル方程式 1

A($\vec{a}$) を通り，方向ベクトルを $\vec{d}$ とする直線上の点点 P($\vec{p}$) について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ である。t は P の位置と直接結びつく実数値であり，パラメータ (媒介変数) と呼ばれる。

導出
方向ベクトルの定義により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{d}$ は平行である。
すなわち，実数 t が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$
有名な変形により，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$

t の意味
$t = 0$ ならばまたそのときに限り P と A は一致する。
$t = 2$ ならばまたそのときに限り $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\vec{d}$
$t = -\dfrac{1}{2}$ ならばまたそのときに限り $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\dfrac{1}{2}\vec{d}$
実際に図をかいて確認しよう。

直線のベクトル方程式 2

A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る直線上の点 P($\vec{p}$) について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ である。t は P の位置と直接結びつく実数値であり，パラメータ (媒介変数) と呼ばれる。

導出
3 点が一直線上にある条件より，実数 t が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
有名な変形により，$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

t の意味
$t = 0$ ならばまたそのときに限り P は A に一致する。
$t = 1$ ならばまたそのときに限り P は B に一致する。
$t = \dfrac{1}{2}$ ならばまたそのときに限り P は線分 AB の中点に一致する。
$t = \dfrac{2}{3}$ ならばまたそのときに限り P は線分 AB を 2:1 に内分する点に一致する。
$t = -\dfrac{1}{2}$ ならばまたそのときに限り P は線分 AB を 1:3 に外分する点に一致する。
実際に図をかいて確認しよう。

例は大切だよ。
ベクトル方程式から座標の関係式を導いてみよう。
(1) A$(1,3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(3,-1)$ である直線上の点 $\vec{p}=(x,y)$ について，
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b} \iff (x,y)=(1,3)+t(3,-1)$
$\iff \begin{cases} x=1+3t \\ y=3-t \end{cases}$
$\iff x+3y=10$

(2) A$(1,3)$, B$(3,-2)$ を通る直線上の点 $\vec{p}=(x,y)$ について，
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \iff \vec{p}-\vec{a}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$\iff \begin{cases} x-1=2t \\ y-3=-5t \end{cases}$
$\iff 5(x-1)+2(y-3)=0 \iff 5x+2y=11$

直線のベクトル方程式 3

A$(\vec{a})$ を通り，法線ベクトルを $\vec{n}$ とする直線上の点 P$(\vec{p})$ について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ である。

導出
法線ベクトルの定義により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ は垂直である。
すなわち，実数 t が存在して，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$
有名な変形により，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

例は大切だよ。
ベクトル方程式から座標の関係式を導いてみよう。
(1) A$(1,3)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=(3,-1)$ である直線上の点 $\vec{p}=(x,y)$ について，
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ $3(x-1)-(y-3)=0$
$\iff 3x-y=6$

(2) 直線 $7x+3y=2$ の法線ベクトルは $(7,3)$ である。