121015 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 11 回

ベクトルを幾何学に応用してみる。今回は図形をベクトルで表現してみる。
位置ベクトルの満たしている関係式をベクトル方程式という。
図形とベクトル方程式の関連づけを考察する。座標で表したとき，直線と関連付けられた方程式は実質 1 つであったが，ベクトル方程式は，図形の見方によって変わってくる。

円のベクトル方程式 1

中心を $\mathrm{C}(\vec{p})$，半径 r とする円上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$|\vec{p}-\vec{c}|=r$ である。

導出
円の定義により，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}=r$
有名な変形により，$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

円のベクトル方程式 2

$\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ である。

導出
角 APB は直角であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$
有名な変形により，$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

例は大切だよ。
ベクトル方程式から座標の関係式を導いてみよう。
$\mathrm{A}(1,3), \mathrm{B}(3,0)$ を直径の両端とする円の方程式を求める。
円上の点 $\vec{p}=(x,y)$ について，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,y-3), \overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-3,y)$ であるから，
$(x-1)(x-3)+(y-3)y=0 \iff x^2+y^2-4x-3y+3=0$

垂直二等分線のベクトル方程式

A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について，線分 AB の垂直二等分線上の点 P($\vec{p}$) について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$ である。

角の二等分線のベクトル方程式

O($\vec{0}$), A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について，角 AOB の二等分線上の点 P($\vec{p}$) について，$\vec{p}$ の満たすべき方程式は
$$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

説明してみよう。