121016 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 12 回

ベクトルを幾何学に応用してみる。今回は図形をベクトルで表現してみる。
点の存在範囲について考えてみる。

ベクトルの分解

平面上 のベクトル，$\vec{a}, \vec{b}$ がある。
$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0}$ なる (k,l) は自明なもの $(0,0)$ 以外はないとする。
このとき，平面上 の任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ なる実数の組 (s,t) が一意に定まる。

3 点が一直線上にある条件

3 点 $\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$, $\mathrm{P}(\vec{p})$ が一直線上にある。
$\iff \overrightarrow{\mathrm{DP}}=k\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ なる実数 k が存在する。
$\iff \vec{p}-\vec{d}=k(\vec{e}-\vec{d}) \iff \vec{p}=(1-k)\vec{d}+k\vec{e}$
$\iff \vec{p}=s\vec{d}+t\vec{e}$ と表すとき $s+t=1$

次の問題を考えてみる。

例題
三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。s, t は次の条件を満たす。
$s+t=2,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$
この条件を満たす点 P の存在範囲を見てみる。
3 点が一直線上にある条件に当てはまるように変形する。(Hesse の標準形)
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+t=2$
$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{s}{2}\right)(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\left(\dfrac{t}{2}\right)(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\quad \dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$
$s \geqq 0,\ t \geqq 0$ とあわせると，P は線分 CD 上にある。ここで，C は OA を 2:1 に外分する点，D は OB を 2:1 に外分する点である。

例題
三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。s, t は次の条件を満たす。
$s+2t=2,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$
この条件を満たす点 P の存在範囲を見てみる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+2t=2$ から，s を消去して，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2-2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$t=0$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad t=1$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,　P は線分 CB 上にあるのではないかと予想を立てる。ここで，C は OA を 2:1 に外分する点である。

実際，3 点が一直線上にある条件に当てはまるように変形する。(Hesse の標準形)
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+2t=2$
$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{s}{2}\right)(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \dfrac{s}{2}+t=1$
$s \geqq 0,\ t \geqq 0$ とあわせると，P は線分 CB 上にあることがいえる。