121031 初版
http://goo.gl/MFRFj

教本 ベクトル　第 13 回

### 13.1 正射影

教科書などにあまり書いていないが，問題を解くときや物理などの応用へ利用価値の高い考えである。

正射影

$\vec{p}, \vec{a}$ に対して，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる 3 点 O, A, P をとる。
直線 OA に P から垂線 PH を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影という。

正射影の大きさ

$\vec{h}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影とするとき，$|\vec{h}| = \dfrac{|\vec{p} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

実際，$\vec{p}$ と $\vec{a}$ のなす角を $\theta$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{p}||\vec{a}|}$
正射影の定義により，$|\vec{h}| = |\vec{p}||\cos\theta|$ だから。

正射影 2

$\vec{h}$ を $\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影とするとき，$\vec{h} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}$

正射影の大きさが上の式で求められるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の $|\vec{h}|$ 倍でよい。
最後の式は，おもむきがある。

### 13.2 応用

直線 $l$： $ax + by + c = 0$ と点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ の距離 $d$ を求める。
$l$ の法線ベクトルは $\vec{n} = (a, b)$ である。
直線 $l$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ をとって，$l$ と A の距離は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の $\vec{n}$ への正射影の大きさであるから，$\dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\vec{n}|}$

ここで，
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = ax_1 + by_1 - (ax_0 + by_0)$
P は $l$ 上の点である $\iff ax_0 + by_0 + c = 0$ より
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = ax_1 + by_1 + c$
よって，$d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$