

8パズルについての考察

市川 遼 杉本 智宏

1. 研究の動機

とあるサイトの記事で、8パズルのことが紹介されていた。実際に遊んだこともあり、その動かし方や解き方を、数学的に表すことができないかと興味を持った。

2. 研究内容

- ①8パズルの可能な盤面と不可能な盤面の割合がどのように存在するか
- ②8パズルの最長手数について考える

3. 8パズルの説明

8パズルは、図1のように3×3のボード上に1～8の数字がそれぞれ書かれた8枚の駒があり、1駒分の空きを利用して駒をスライドし、駒を目的の盤面(図2のようにボード左上から1 2 3 4 5 6 7 8 (空)の順になる状態)にするパズルである。

2	1	3
4	空	6
7	8	5

図1

1	2	3
4	5	6
7	8	

図2

4. 定義

- ・駒: ボード上の1～8のいずれかの数字が書かれたもの
- ・盤面: 8パズルの1～8の駒がボード上に並べられた状態
- ・操作: 1つの駒と空きマスの交換
1回の操作を一手とする。
- ・初期状態
図2のように、1～8の駒と空きマスがボード上にある状態。
- ・可能な盤面
初期状態(図2の状態)に戻せる盤面のこと。
- ・盤面の表し方
初期状態に1～8の順に表し方の形で表す。空きマスは9で表す。
例えば、図1の盤面は(213496785)と表し、
図2の盤面は(123456789)と表す。
- ・ある盤面の最長手数: 可能な盤面はその定義からN手で元の盤面に戻せる。そのようなNの中で最小の値。
- ・8パズルの最長手数: 最長手数としてありうるNの値の中で最大の値。

5. 先行研究で分かっていること

- ①全盤面数: 362880 可能な盤面数: 181440 可能な盤面と不可能な盤面の比は1:1
- ②可能な盤面の判定法
SをTにする置換のバリティ(偶奇)と「空き」の初期状態との距離の偶奇が等しい。

6.1. 数列 (a1,a2...ak)の順列全体から数列 (a1,a2...ak,ak+1)の順列全体を考える

例) 数列 (1,2) の順列全体から数列(1,2,3)の順列全体を作る。
数列 (1,2) の順列に以下のような操作を行うと数列 (1,2,3) の順列ができる。

*に3を入れていくと
1 2 → 3 1 2
* * * 1 3 2
1 2 3
2 1 → 3 2 1
* * * 2 3 1
2 1 3

6.2. 8パズルの規則的な動き

図2の盤面の時、5、6、8の3コマを空きマス1個を使って各コマを時計回りに動かしていく。空きマスが4回移動して再び元の位置に戻ったとき、各マスは反時計回りに1マスずつずれて (1 2 3 4 5 6 7 8) の盤面になる。この一連の操作を3回連続して行くと図1の盤面に戻る。このように空きマスを輪を描くように操作するとき、空きマスが元の位置に戻るまでの操作を1サイクルと定義する。N個のマスをサイクルするとき、(N-1)回のサイクルで元の盤面に戻ることが分かった。

7.1. 可能な盤面と不可能な盤面の割合

先行研究ではすべての可能な盤面をだすかたちで盤面の割合が出されていたが、わたしたちは別の方法でそれを証明した。

7.2. 不可能な盤面の初期配置

また、中間発表で「すべての不可能な配置を (1 2 3 4 5 6 8 7 9) の盤面に戻ることができるか」という質問があったが、今回それも証明することができた。

8. 8パズルの最長手数について

私たちは先行研究で、8パズルの最長手数が31という研究結果を見つけた。ある盤面を初期状態に戻す操作の過程で、同じ盤面が繰り返し現れることがなければ、その操作の手数は最短手数といえると考え、先行研究を覆す最短手数が32手の可能性がある盤面(別紙参照)を見つけたと中間研究で発表したが、その後の研究で、例えばある盤面が初期状態に戻す操作の過程で、同じ盤面が繰り返し現れることがなくとも、その操作は最短だとは言えないことが判明し、この盤面(別紙参照) 最短16手で初期状態に戻せることが分かった。よって先行研究を否定するものとはなかった。

9. 今後の展望

最初は、可能な盤面と不可能な盤面の割合についてメインに研究しようと思っていたが、かなり早い段階で分かったので、もう一つの8パズルの最長手数についてさらに詳しく研究していた。そこで、最初は(8.8パズルの最小手数について)にあることが8パズルの最長手数に関して言えるのではないかと考えていたが、結局それは言えないことが分かった。そのため、8パズルの最長手数に関して成り立つ性質をもっと探求していきたい。

参考文献: <https://mathtrain.jp/8puzzle>

(2 1 3 4 9 6 7 8 5)



(1 3 5 7 9 2 4 6 8)



.

.

.



(1 3 5 7 9 2 4 6 8)



(1 2 3 4 5 6 7 8 9)