

8 パズルについての考察

3 年理数科 市川 杉本

1. 序論

8 パズルは、図 1 のように 3×3 のボード上に 1 ～ 8 の数字がそれぞれ書かれた 8 枚の駒があり、1 駒分の空きを利用して駒をスライドし、駒を目的の配置（ボード左上から 1 2 3 4 5 6 7 8（空）の順になる状態）にするパズルである。今回私たちはとあるサイトで 8 パズルについて紹介されている記事を見つけ、実際に遊んだこともあり、その動かし方や解き方を数学的に表すことができないかと興味を持った。私たちは置換の考え方を利用して、8 パズルの可能な盤面と不可能な盤面の数や、最長手数 of 解明を目的として研究を行った。

2. 先行研究

可能な盤面の判別法とその証明はすでに先行研究で分かっている。

定理：

判別対象のある盤面（操作を行う前の盤面）を s

初期盤面（完成した状態の盤面）を t とする

8 パズルが完成できる $\longleftrightarrow s$ を t にする置換のパリティ(偶奇)と空きマスの最短距離が等しい。

例：

図 2 の盤面は可能な盤面であるかどうかについてしらべる。定義に沿って、(213496785)と表せる。初期盤面になるように置換していくと

2 1 3 4 9 6 7 8 5 (2 $\longleftrightarrow$ 3)

1 2 3 4 9 6 7 8 5 (9 $\longleftrightarrow$ 5)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

以上より 2 回の置換で初期盤面に戻せるので、置換のパリティ

は偶…①

また、空きマスの最短距離は 2 よりその偶奇は偶…②

①、②より置換のパリティ(偶奇)と空きマスの最短距離の偶奇は等しい。よって図の盤面は可能な盤面である。

図 1			図 2		
1	2	3	2	1	3
4	5	6	4		6
7	8		7	8	5

証明：

定理の $\rightarrow$ を証明する

判別対象の 8 パズルの盤面は可能な盤面とする。このとき、初期盤面までに駒を移動させた回数 N の偶奇を二通りの方法で考える。

・一回の操作で空きマスは必ず 1 マス移動するので、 N の偶奇と「判別対象の盤面から初期盤面の空き of 最短距離」の偶奇は等しい。

・一回のスライドは互換に対応しているので s から t への置換は N 回の互換で表せる。よって N の偶奇と「 s から t への置換のパリティは等しい」

以上より定理の $\rightarrow$ が証明できた。

3. 定義

- 駒：ボード上の 1 ～ 8 のいずれかの数が書かれたもの
- 盤面：8 パズルの 1～8 の駒がボード上に並べられた状態

- ・操作：1つの駒と空きマスの交換 1回の操作を一手とする。
- ・初期盤面：図1のように、1～8の駒と空きマスがボード上にある状態。
- ・可能な盤面：初期盤面（図1の状態）に戻せる盤面のこと。
- ・盤面の表し方：初期盤面に1～8の順に表し方の形で表す。空きマスは9で表す。
例えば、図1の盤面は(123456789)と表し、図2の盤面は(213496785)と表す。
- ・ある盤面の最短手数：可能な盤面はその定義からN手で元の盤面に戻せる。そのようなNの中で最小の値。
- ・8パズルの最長手数：最短手数としてありうるNの値の中で最大の値

4. 研究方法

私たちは8パズルについて初めに3駒、4駒、5駒と、いくつかの駒だけが入れ替わった盤面について、可能な盤面と不可能な盤面の比を考えた。その時、可能な盤面と不可能な盤面の割合が1:1に近づいていることに気づき、可能な盤面と不可能な盤面の数が等しくなるという予想を立て、以下の証明を行った。

命題 8パズルの可能な盤面と不可能な盤面の比は1:1である。

証明 空きマスが初期盤面にあるとき、

α ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 9$) の可能な盤面に対して、 a_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$)

をそれぞれk個 ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) ずらした盤面を α_k とすると、

α_0 ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 9$)

α_1 ($a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, 9$)

:

α_7 ($a_8, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, 9$)

ここで、集合 $S = \{\alpha_k \mid k=0, 1, \dots, 7\}$ とし、集合Sを循環と呼ぶこととする。 α_k を ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 9$) の盤面にするための盤面の駒の交換の回数を考えると、

α_1 を α_0 にするとき、 α_1 について a_1 を一つ左に置換していくと、

($a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, 9$)

↓

($a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_1, a_8, 9$)

↓

($a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1, a_7, a_8, 9$)

↓

:

↓

($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 9$)

よって、 α_1 を α_0 にするとき、その置換の回数は7回である。

α_2 を α_1 にするときも置換の回数は7回であるため、 α_2 を α_0 にする置換の回数は14回である。同様にすると、 α_k を ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 9$) の盤面にするための盤面の駒の交換の回数は、

$\alpha_k \dots 7k$

空きマスは初期盤面の位置にあり、空きマスの初期盤面への最短距離は0であるため、

$k=0, 2, 4, 6$ のとき α_k は可能な配置

$k=1, 3, 5, 7$ のとき α_k は不可能な配置

となる。

また、この操作によって空きマスが初期盤面と同じ位置にあるすべての盤面が表れることを示す。

空きマスが初期盤面の位置にあるとき、可能な盤面全体の集合を P とする。

P の要素の個数を m 個とし、 P の m 個の要素を、

$$\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3) \cdots \alpha(m)$$

と表す。すなわち、

$$P = \{ \alpha(k) \mid 1 \leq k \leq m \}$$

とする。このとき、 P の要素の任意の $\alpha(k)$ について循環を考えると、

$$\alpha_0(k), \alpha_2(k), \alpha_4(k), \alpha_6(k) \text{ は可能な盤面}$$

$$\alpha_1(k), \alpha_3(k), \alpha_5(k), \alpha_7(k) \text{ は不可能な盤面}$$

ここで、どの $\alpha(k)$ の循環にも表れない不可能な盤面を、 $\beta(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, 9)$ とすると、 β の循環

$$\beta_0(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, 9)$$

$$\beta_1(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_1, 9)$$

:

$$\beta_7(b_8, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, 9)$$

のいずれもまたどの循環にも表れない。

$\beta_k (k=0, 1, \cdots, 7)$ を β_0 にする置換の回数を考えると、

$$\beta_k \cdots \beta_k$$

β_0 は不可能な盤面であり、初期盤面に戻す置換の回数の偶奇が奇数であるため、

$$\beta_1, \beta_3, \beta_5, \beta_7 \text{ は可能な盤面}$$

ここで、 β_1 について循環を考えると、

$$\beta_1(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_1, 9)$$

$$\beta_2(b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_1, b_2, 9)$$

:

$$\beta_0(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, 9)$$

これは、 β_0 の循環と一致し、仮定よりどの $\alpha(k)$ の循環にも表れないが、 β_1 が可能な盤面であるため、 β_1 の循環に現れる盤面はすべていずれかの $\alpha(k)$ の循環に含まれる。

これは、仮定と矛盾する。

したがって、この操作によって空きマスが初期状態にある 8 パズルのすべての盤面が表れ、また可能な盤面と不可能な盤面がちょうど半分ずつ存在する。

同様のことが空きマスが任意の位置であるときにも成り立つ。

よって、8 パズルの可能な盤面と不可能な盤面の割合は 1 対 1 である。

このように循環を定義すれば、 n が奇数の時、一般に n^2-1 パズルについて可能な盤面と不可能な盤面の数の比が 1 : 1 であることも成り立つ。

この循環を用いた証明は、 n が奇数のとき、 α_k から α_{k-1} に戻す互換の回数の偶奇が奇となるため、 k の値によって偶奇が変わり、循環に現れる可能な盤面と不可能な盤面の数の比が 1 : 1 となることで証明することができたが、 n が偶数のとき、 α_k から α_{k-1} に戻す互換の回数の偶奇が偶となるため、うまく証明することができない。そこで、次の証明にあるように、循環の定義の仕方を少し変えて証明した。

命題 2 以上の偶数 n について、 n^2-1 パズルの可能な盤面と不可能な盤面の比は 1 : 1

証明 空きマスが初期盤面の位置にあるとき、 $\alpha(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n^2-1}, n^2)$ の可能な盤面 (n^2 は空きマス) に対して、

$a_i (i=1,3,5,\dots,n^2-3,n^2-1)$ をそれぞれ $2k$ 個 ($k=0,1,2,\dots,n^2/2,(n^2-2)/2$) ずらした盤面を α_k とすると、

$$\alpha_0 (a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n^2-1},n^2)$$

$$\alpha_1 (a_3,a_2,a_5,\dots,a_1,n^2)$$

$$\alpha_2 (a_5,a_2,a_7,\dots,a_3,n^2)$$

:

$$\alpha_{n^2-2} (a_{n^2-1},a_2,a_1,\dots,a_{n^2-1},n^2)$$

α_k の盤面を α_{k-1} に戻す置換の回数は $(n^2-2)/2$ 回である。($k=0$ のとき、 0 回)

よって、 α_k を α_0 に戻すための置換の回数は、

$$\alpha_k \cdots ((n^2-2)/2) \times k$$

n は偶数であるため、 n^2 は 4 の倍数であり、このことより、

$$n^2-2=2L \text{ (} L \text{ は正の奇数)}$$

と表されるため、

k が偶数のとき、 $((n^2-2)/2) \times k$ は偶数

k が奇数のとき、 $((n^2-2)/2) \times k$ は奇数

α_0 は可能な盤面であるため、 α_0 を初期盤面 $(1,2,3,\dots,n^2-1,n^2)$ に戻す置換のパリティは偶、空きマスは初期盤面の位置にあるため、空きマスの最短距離の偶奇は偶、これらより、

$k=0,2,4,\dots,n^2-3$ のとき α_k は可能な盤面

$k=1,3,5,\dots,n^2-2$ のとき α_k は不可能な盤面

α_0 に対して α_k の集合を循環と定義する。

このとき、循環に現れる可能な盤面と不可能な盤面の数の比は $1:1$ である。8 パズルの可能な盤面と不可能な盤面の数の比が $1:1$ であることの証明と同様に集合 U , P , Q を定義することで、この操作によって空きマスが初期盤面の位置にある n^2-1 パズルのすべての盤面が現れることを示せる。

よって、命題が真であることが示せた。

また、私たちは、可能な盤面と不可能な盤面の数の比が $1:1$ であるならば、不可能な盤面についても可能な盤面と同じように一つの盤面に戻すことができるのではないかと考え、次の命題を考えた。

命題 8 パズルの不可能な盤面はすべて $(1,2,3,4,5,6,8,7,9)$ の盤面に戻せる。

証明 可能な盤面は定義よりすべて初期盤面に戻せる。そのため、可能な盤面の 7 と 8 を入れ替えた盤面はすべて $(1,2,3,4,5,6,8,7,9)$ の盤面に戻すことができる。

このことより、任意の可能な盤面の 7 と 8 の駒を入れ替えた盤面が不可能な盤面であることを示す。

ある可能な盤面を $\alpha (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)$ とし、 α の 7 と 8 の駒を入れ替えた盤面を β とする。 α は可能な盤面であるため、盤面 α を初期盤面に戻す駒の交換の回数と空きマスの初期盤面との距離の偶奇は等しい。

ここで、 α の 7 と 8 の駒を入れ替えると空きマスは動かないため、空きマスの初期盤面との距離は変わらないが、初期盤面に戻す駒の交換の回数は 1 増えるため、盤面 β を初期盤面に戻す駒の交換の回数と空きマスの初期盤面との距離の偶奇は一致しない。

よって盤面 β は不可能な盤面である。

ここで、この操作によってできる盤面は可能な盤面と 1 対 1 に対応しており、可能な盤面と不可能な盤面の割合が 1 対 1 であることから、可能な盤面の 7 と 8 を入れ替えた盤面すべては 8 パズルの不可能な盤面と一致する。

したがって、不可能な盤面はすべて (1,2,3,4,5,6,8,7,9) に戻すことができる.

続いて私たちは n^2-1 パズルの最長手数について一般式で表そうとした。

まず、 n^2-1 パズルの最長手数について、次のような予想を立てた。

予想) ある盤面を初期盤面に戻す操作の過程で、同じ盤面が繰り返し現れなければその操作の手数は最短手数といえる。

しかし実際に、8 パズルのいくつかの盤面で同じ盤面が現れないように 2 通りの方法で動かしたとき、異なる手数で初期盤面に戻ったことから、 n^2-1 パズルの最長手数についてこの予想が常には成り立たないことが分かったため、 n^2-1 パズルの最長手数について一般式で表すことができなかった。

5. 結論・展望

今回私たちが行った研究の 8 パズルについて、先行研究の多くはアルゴリズムを用いたかたちで 8 パズルの配置数や最長手数を求めている。そこで私たちはより単純なかたちで配置数や最長手数を表すことができないかと考え、置換を用いて 8 パズルだけでなく、一般に n^2-1 パズルについて可能な盤面と不可能な盤面の比が 1 : 1 であることが示せた。最長手数についても予想を立てたが、うまくいかなかった。今後は最長手数についてより深く研究し、最長手数に関して言える規則性について考察していきたい。

6. 謝辞

この研究に携わった高田高校の先生方に、この場を借りてお礼申し上げます。

7. 参考文献

<https://mathtrain.jp/8puzzle>