指数と対数とネイピア数 e

1. 指数と指数関数の定義

n が自然数のとき、a^n は a の n 個の積のことである。

$2^1 = \boxed{\text{ア}}$, $2^2 = \boxed{\text{イ}}$, $2^3 = \boxed{\text{ウ}}$, $\cdots$, $2^{10} = \boxed{\text{エ}}$,

2^n の値は n が 1 増えれば $\boxed{\text{オ}}$ 倍になり、n が 1 減れば $\boxed{\text{カ}}$ 倍になる。したがって、$2^0 = \boxed{\text{キ}}$, $2^{-1} = \boxed{\text{ク}}$, $2^{-10} = \boxed{\text{ケ}}$.

負の整数の指数は、-1 乗については逆数 $(a \cdot a^{-1} = 1)$、$-n$ 乗については、a の逆数の n 個の積あるいは a^n の逆数とみることができる。すると、指数法則はすべての整数で成り立つ。等比数列の考えも参考にするとよい。

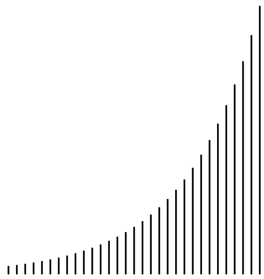


図 1: ある本数ごとに長さが 2 倍になる線分

さらに、$4^1 = 4$, $4^2 = 16$ であるが、$4 = 2^2$, $16 = 2^4$ であることに留意する。すると、$4^{\frac{3}{2}}$ は $\boxed{\text{コ}}$ であるとするのが都合がよい。$4^2 = 4^{1+1} = 4^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ とみて、$4^{\frac{1}{2}}$ は $\boxed{\text{サ}}$ のこととみるのがよいようである。同じように $8^{\frac{4}{3}}$ は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$(a^m)^n = a^{mn}$ において、m,n が自然数限定を解除して有理数 m, n に拡張している。$a^{\frac{1}{m}}$ は m 乗したら a になる数 $((a^{\frac{1}{m}})^m = a)$ のべき乗表現とみる。相乗平均の考えも参考にするとよい。特に、$a^{\frac{1}{2}}$ は $\boxed{\text{ス}}$ のことである。(a は 0 以上の実数としておこう)

これで、有理数の指数が定義された。あとは極限操作で x に関して連続になるようにする。このように、指定された a を底 (てい) として、「すべての実数を定義域にもつ」指数関数 a^x を定義する。(a は 1 以外の正の数としておこう。)

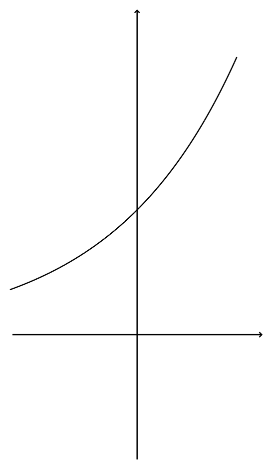


図 2: 指数関数のグラフ

2. 指数関数の性質

いわゆる指数法則は、自然に理解される自然数に限定された指数を実数に拡張しても成立する。(ように指数の拡張を行った。) つまり、$a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$ は、x, y がどんな数でも成立する。

後の式は、底によってたくさんあるようにみえる指数関数が実質 1 種類しかないことを意味している。例えば、$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ だから、どんな x に対しても、4^x の値は 2^x の $\boxed{\text{ア}}$ 乗である。同様に 8^x の値は 4^x の $\boxed{\text{イ}}$ 乗である。指数関数の代表となる底はどんな数がよいのだろうか?

3. 対数と対数関数の定義

べき乗表をみていると、次のことに気がつく。

もとの数の世界		2 を底とする		指数の世界
128×256	$=$	$2^7 \times 2^8$	$\longleftrightarrow$	$7+8$
$\Vert$				$\Vert$
32768	$=$	2^{15}	$\longleftrightarrow$	15

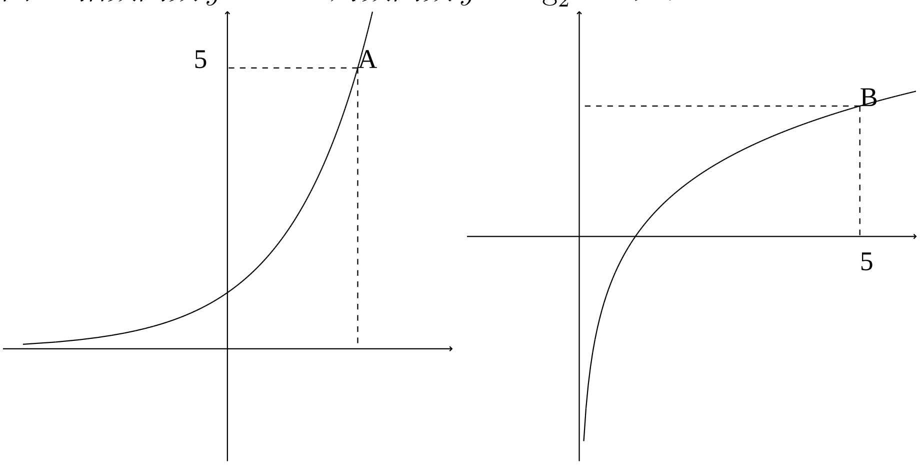
もとの数の世界		2 を底とする		指数の世界
$1099511627776 \div 16777216$	$=$	$2^{40} \div 2^{24}$	$\longleftrightarrow$	$40-24$
$\Vert$				$\Vert$
65536	$=$	2^{16}	$\longleftrightarrow$	16

$4.194 \div 1.31$ の計算も、$22-17$ の計算をすることとほぼ同じであることに気がつくだろう。べき乗表の逆対応表があれば、乗除特に割り算は相当楽に計算できる。これが対数の考えである。

対数とはべき乗表現の指数をいうこと、例えば $2^x = 32$ という方程式の解 x のことを、「2 を底とする 32 の対数」といい $\log_2 32$ とかく。一般に $a^x = b$ を満たす x を $\log_a b$ と表記する。$2^x = 8$ となる x は定義により $x = \log_2 \boxed{ア}$ であるが、これは $\boxed{イ}$ と等しい。$4^x = 8$ となる x は定義により $x = \log_4 \boxed{ウ}$ であるが、これは $\boxed{エ}$ と等しい。

$f(x) = 2^x$ と $g(x) = \log_2 x$ は互いに逆関数である。$r = \log_2 R$ は $2^r = R$ を言い換えているだから。つまり、$b^{\log_b a} = a$

図 3: 指数関数 $y = 2^x$ と対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフ



点 A の y 座標を 5 とすると、x 座標は $\log_2 5$

点 B の x 座標を 5 とすると、y 座標は $\log_2 5$

指数法則を言い換えたのが、対数の性質である。すなわち、$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$ が成り立つ。

これと常用対数表により、例えば

もとの数の世界		常用対数の世界
37750000×54300	$\longleftrightarrow$	$7.5769 + 4.7348$
$\parallel$		$\parallel$
2.050×10^{12}	$\longleftrightarrow$	12.3117

もとの数の世界		常用対数の世界
$37750000 \div 54300$	$\longleftrightarrow$	$7.5769 - 4.7348$
$\parallel$		$\parallel$
6.952×10^{2}	$\longleftrightarrow$	2.8421

対数表を使うことによって、乗除の値が加減で求めることができるのである!!

4. 対数関数の性質

いわゆる底の変換公式は、$a = b^{\log_b a}$ と $(a^p)^q = (a^q)^p$ より得られる。$x = a^p$ として、$x = (b^{\log_b a})^p = b^{(\log_b a)(\log_a x)}$ より、$\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$ である。

この等式 $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$ は、底によってたくさんあるように見える対数関数は実質１種類しかないことを示している。例えば $\log_2 x = \boxed{\text{ア}}(\log_4 x)$ であるから、どんな x に対しても $\log_2 x$ の値は $\log_4 x$ の$\boxed{\text{イ}}$倍である。$\log_4 x$ の値は $\log_8 x$ の$\boxed{\text{ウ}}$倍である。

対数関数の代表となる底はどんな数がよいであろうか?

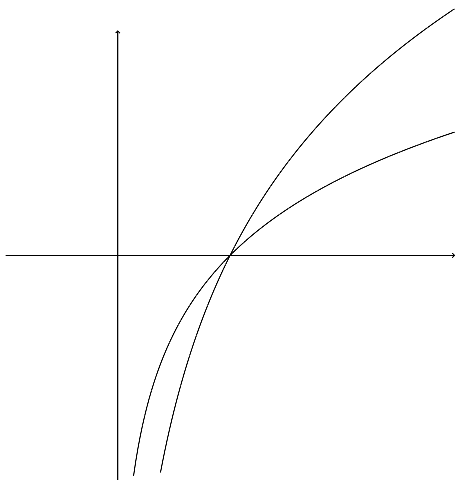


図 4: 対数関数のグラフ　2つ

5. 対数関数の代表としての自然対数

$a>1,\, h>0$ として、曲線 $y=a^x$ 上に 2 点 $\mathrm{G}(0,1),\, \mathrm{H}(h,a^h)$ をとる。このとき、a に対して、直線 GH の傾きが 1 となる h がとれるかどうかを調べる。

曲線 $y=2^x$ 上の 2 点 $\mathrm{G}(0,1),\, \mathrm{H}(1,\boxed{ア})$ については、直線 GH の傾きは $\boxed{イ}$ である。

$y=3^x$ 上の点 $\mathrm{H}(1,\boxed{ウ})$ については、GH の傾きは $\boxed{エ}$ であるが、GH の傾きが 1 となる $\mathrm{H}(h,3^h)$ はとれるかといえば、どうもできないようである。

$y=\left(\frac{9}{4}\right)^x$ は点 H を $\left(\frac{1}{2},\boxed{オ}\right)$ にとると、GH の傾きは $\boxed{カ}$ である。

曲線 $y=a^x$ 上に 2 点 $\mathrm{G}(0,1),\, \mathrm{H}\left(\frac{1}{n},a^{\frac{1}{n}}\right)$ をとる。直線 GH の傾きが 1 となる a の値を n の式で表すと $\boxed{キ}$ である。

この値は n をどんどん大きくすると (点 H を G に近づけると) ある値に近づいていく。その極限値を e と表記する。

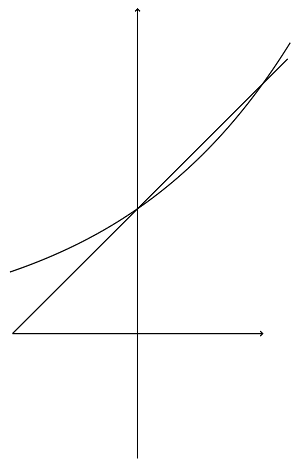


図 5: $y=2^x$ と $y=x+1$

どんな底に対しても指数関数のグラフは点 G を通る。点 G を通り傾き 1 の直線が第 1 象限で再びグラフと共有点をもつかどうかは底 a がある数よりも小さいか大きいかで決まる。その境界値が e である。すなわち、底 a が e より小さければ、GH の傾きが 1 となる H をグラフ上にとることができ、e より大きければとることができない。言い換えると $y=e^x$ の点 $(0,1)$ における接線の傾きは 1 である。

対数関数については、$a>1$ として、グラフ $y=\log_a x$ と $\mathrm{G}(1,0)$ に対して、G を通り傾き 1 の直線が第 1 象限で再びグラフと共有点をもつ必要かつ十分な条件は、底 a が e より小さいことである。言い換えると $y=\log_e x$ の点 $(1,0)$ における接線の傾きは 1 である。

指数関数の底の代表と対数関数の底の代表には e を採用している。$\log_e x$ を自然対数といい、ただ $\log x$ とかく。

$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}=\left(\frac{1}{\log a}\right)\times\log x$, 指数関数については、

$a^x=(e^{\log a})^x=(e^x)^{\log a}$ が成り立つ。

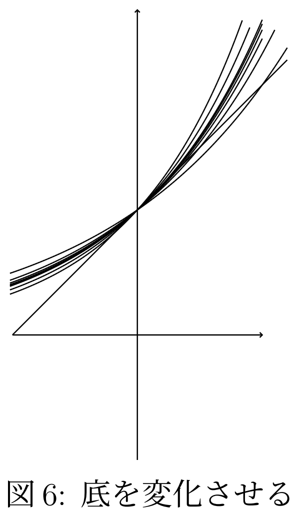


図 6: 底を変化させる

6. e と 2 項定理

e の値はどのくらいだろうか。

2 項定理によると $(1+x)^n$ の x^k の係数はその名の通り 2 項係数であり、

${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$　例えば、${}_n\mathrm{C}_1 = n$, ${}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$, ${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, ${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}, \cdots$

すると $(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \frac{1}{n^4} + \cdots$ だから

$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot (1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} \cdot (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \frac{1}{4!} \cdot (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n}) + \cdots$ であり、n をとても大きな数とすると $\frac{1}{k!} \cdot (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n})$ はほとんど $\frac{1}{k!}$ と等しく、これは $k \geqq 2$ ならば $\frac{1}{2^{k-1}}$ より十分小さい。また、1 に $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ と $\frac{1}{2^{k-1}}$ を次々に加えていくと和は単調に増加するが 2 を超えない。

したがって、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は n をどんどん大きくすると、値は単調に増加するが大きく見積もっても 3 は超えない。この極限値が e であった。実際は 2.718281828 くらいの無理数で、比較的簡単で近い有理数は $\frac{2721}{1001}$ である。

数式編

(F1)　$a^0 = 1$, $a \cdot a^{-1} = 1$, $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

(F2)　$(a^{\frac{1}{m}})^m = a$

(F3)　$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

(F3')　$(a^b)^x = (a^x)^b$

(F4)　$a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a b$

(F4')　$a^{\log_a b} = b$

(F5)　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$

(F6)　$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$

(F7)　$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$

(F8)　$\log_e x$ を自然対数といい、ただ $\log x$ とかく。

$\log_a x = \left(\frac{1}{\log a}\right) \times \log x$, $a^x = (e^x)^{\log a}$

(F9)　$e = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

数表編

n	2^n	4^n	8^n
1	2	4	8
2	4	16	64
3	8	64	512
4	16	256	4096
5	32	1024	32768
6	64	4096	262144
7	128	16384	2097152
8	256	65536	16777216
9	512	262144	134217728
10	1024	1048576	1073741824
11	2048	4194304	8589934592
12	4096	16777216	68719476736
13	8192	67108864	549755813888
14	16384	268435456	4398046511104
15	32768	1073741824	35184372088832
16	65536	4294967296	281474976710656
17	131072	17179869184	2251799813685248
18	262144	68719476736	18014398509481984
19	524288	274877906944	144115188075855872
20	1048576	1099511627776	1152921504606846976
21	2097152	4398046511104	9223372036854775808
22	4194304	17592186044416	73786976294838206464
23	8388608	70368744177664	590295810358705651712
24	16777216	281474976710656	4722366482869645213696
25	33554432	1125899906842624	37778931862957161709568
26	67108864	4503599627370496	302231454903657293676544
27	134217728	18014398509481984	2417851639229258349412352
28	268435456	72057594037927936	19342813113834066795298816
29	536870912	288230376151711744	154742504910672534362390528
30	1073741824	1152921504606846976	1237940039285380274899124224